I. megoldás. Számítsuk ki a sorozat első néhány elemét:

$$a_1=\sqrt{2}; a_2=\frac{\sqrt{3}\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{6}-1)(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2})}=\frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{1}=4\sqrt{2}-3\sqrt{3}; a_3=\frac{\sqrt{3}(4\sqrt{2}-3\sqrt{3})-1}{(4\sqrt{2}-3\sqrt{3})+\sqrt{3}}=\frac{(2\sqrt{6}-5)(2\sqrt{2}+}{(2\sqrt{2}-\sqrt{3})(2\sqrt{2}+}$$

Tehát $a_7=a_1$. Mivel a rekurzió minden elemet az előzővel definiál az indextől függetlenül, innen kezdve a sorozat periodikus: $a_{n+6}=a_n$ tetszőleges n pozitív egészre.

Gombos László (Zalaegerszeg, Zrínyi M. Gimn., IV. o.t.)

II. megoldás. A sorozat rekurziója hasonlít a kotangens-függvény addíciós tételére:

$$\operatorname{ctg}(x+y)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y-1}{\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}y}.$$

Legyen α olyan valós szám, amelyre $\operatorname{ctg}\alpha=\sqrt{2}$. Azt állítjuk, hogy minden n-re

$$a_n=\operatorname{ctg}\left(\alpha+(n-1)\frac{\pi}{6}\right).$$

(Mivel $-\sqrt{2}$ nem azonos $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{6}$, $\frac{4\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ egyikének kotangensével sem, a jobb oldal mindig értelmes.)

Ha $n=1$, akkor állításunk α választása miatt igaz. Ha pedig

$$a_n=\operatorname{ctg}\left(\alpha+(n-1)\frac{\pi}{6}\right),$$

akkor

$$a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}a_n-1}{a_n+\sqrt{3}}=\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\operatorname{ctg}\left(\alpha+(n-1)\frac{\pi}{6}\right)-1}{\operatorname{ctg}\left(\alpha+(n-1)\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}}==\operatorname{ctg}\left(\left(\alpha+(n-1)\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{ctg}\left(\alpha+n\frac{\pi}{6}\right).$$

Az állításunk tehát igaz.

Az (a_n) sorozat periodikussága ezután a kotangens-függvény periodikusságából következik. Mivel a kotangens-függvénynek π a periódusa,

$$a_{n+6}=\operatorname{ctg}\left(\alpha+(n+5)\frac{\pi}{6}\right)=\operatorname{ctg}\left(\alpha+(n-1)\frac{\pi}{6}+\pi\right)=\operatorname{ctg}\left(\alpha+(n-1)\frac{\pi}{6}\right)=a_n.$$

Koblinger Egmont (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.)

Megjegyzés. Ha a_0-nak bármilyen, 0-tól, $\pm\sqrt{3}$-tól és $\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$-tól különböző számot választunk, a sorozat periodikus lesz. Ez mindkét megoldás módszerével igazolható.