Alakítsuk át a bal oldali összeg első tagját a következőképpen:

$$\frac{T}{\sqrt{a^2b^2-4T^2}}=\sqrt{\frac{T^2}{\frac{4T^2}{\sin^2\gamma}-4T^2}}=\sqrt{\frac{1}{\frac{4}{\sin^2\gamma}-4}}=\sqrt{\frac{\sin^2\gamma}{4\cos^2\gamma}}=\frac{1}{2}|\operatorname{tg}\gamma|=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\gamma,$$

(felhasználtuk, hogy $0<\gamma<\dfrac{\pi}{2}$, így a nevező sehol sem zérus.) A másik két tagot hasonlóan alakítva a bizonyítandóval ekvivalens állítás:

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta+\frac{1}{2}\operatorname{tg}\gamma\geq\frac{3\sqrt{3}}{2},\qquad \text{azaz}\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma\geq 3\sqrt{3}.(1)$$

Mivel a $\operatorname{tg}x$ függvény a $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ intervallumon konvex, Jensen tétele szerint

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma\geq 3\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}=3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3},$$

és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\alpha=\beta=\gamma$. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Maróti Gábor (Szombathely, Nagy Lajos Gimn., IV. o.t.)

Megjegyzés. Több megoldónk az (1) állítást a következőképpen igazolta: Ismeretes, hogy bármely nem derékszögű háromszög szögeire

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma. \tag{2}$$

Mivel a háromszög hegyesszögű, a szögek tangense pozitív, és így

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{3}\geq\sqrt[3]{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma},\qquad \text{amiből (2) alapján:}\frac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)^3}{27}\geq\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma,\qquad \text{azaz}\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}$$

és egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\gamma$, tehát amikor a háromszög szabályos.