

Tegyük föl, hogy a törpök az általunk jól ismert euklideszi síkon élnek pontszerű kunyhókban. Természetesen a törpök falujában az északi irányok párhuzamosak. Ekkor nem indulhatnak el reggel, mert sajnos nem tudnának visszatérni a kunyhójukba.

Tételezzük fel, hogy a törpök egyik reggel elindultak, és a szabályokat betartva estére hazaértek. Ekkor útjuk képe a síkon egy önmagát nem metsző, zárt töröttvonal, vagyis egy sokszög, amelynek minden második oldala párhuzamos egy adott egyenessel (1. ábra). Ezért a sokszög bármelyik nem észak–déli irányú oldalán lévő két szög összege 360° . Ha az utolsó lépés északi irányú volt, akkor az utolsó és az első lépést jelképező szakaszokat egy oldalnak tekinthetjük. Így egy olyan $2n$ oldalú sokszögünk van, amelyben a belső szögek összege $n \cdot 180^\circ$. Ez ellentmond annak az ismert tételnek, hogy egy n -szög belső szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180^\circ$.

Az ellentmondás bizonyítja, hogy a törpök nem indulhatnak el reggel.

Megjegyzés. Más lenne a helyzet, ha a törpök a Földön élnének! Ha egy gömb egyik pontját elnevezzük „Északi Sark”-nak, a gömb egy adott pontjából „észak felé menésnek” pedig a pontot az Északi Sarkkal összekötő főkör rövidebbik ívén a sark felé való mozgást nevezzük, akkor könnyen látható (2. ábra), hogy elindulhatnak a törpök.

A feladat szövegéből nem derült ki egyértelműen, hogy a feladat az euklideszi síkra vonatkozik, a legtöbb megoldó ezt mégis természetesnek vette. Azok is megkapták a teljes pontszámot, akik gömbön vizsgálták a problémát.

