Alakítsuk át az egyenletet a következő módon:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)=xy+61.$$

Vezessük be az $x-y=a$ és $xy=b$ új változókat. Mivel

$$x^2+xy+y^2\geq 0,$$

s egyenlőség esetén

$$0\neq xy+61,$$

ezért[1]

$$x^2+xy+y^2>0 \quad *$$

így $xy\geq 0$ alapján a pozitív, b pedig nemnegatív egész.

Másfelől

$$x^2+xy+y^2=(x-y)^2+3xy=a^2+3b,$$

vagyis

$$a(a^2+3b)=b+61, a^3+3ab=b+61, 3ab-b=61-a^3, b=\frac{61-a^3}{3a-1}.$$

Itt $a\geq 1$ miatt $3a-1>0$, így szükségképpen $61\geq a^3$, azaz $a=1$, 2, 3.

Ha $a=1$, akkor $b=30$.

Ha $a=2$, akkor $b=\frac{53}{5}$, nem egész.

Ha $a=3$, akkor $b=\frac{34}{8}$, nem egész.

Visszahelyettesítve az egyedüli lehetséges $a=1$, $b=30$-at: $x-y=1$ és $xy=30$. Az első egyenlőségből $x=y+1$, ezt beírva

$$y(y+1)=30y^2+y-30=0(y-5)(y+6)=0.$$

Mivel $y\geq 0$, azért $y=5$, tehát $x=6$. Ezekre a megkívánt egyenlőség valóban teljesül, így a megoldás $x=6$, $y=5$.

Csordás Péter (Kecskemét, Zrínyi I. Ált. Isk., 8. o.t.) dolgozata alapján

[1] Amennyiben a nullát nem tekintjük természetes számnak, $x^2+xy+y^2>0$ a feltételtől függetlenül is igaz már. Ez a fajta definíció a megoldásban további $\geq$ típusú feltételeket $>$-ra változtat, ám ez a megoldás szempontjából lényegtelen.