Azt fogjuk igazolni, hogy

$$\max_{x\in[-1,1]} |x^2+ax+b| \geq \frac{1}{2},$$

és egyenlőség csak az $x^2-\frac{1}{2}$ polinomra áll. Tegyük föl, hogy valamilyen a, b esetén

$$|x^2+ax+b| \leq \frac{1}{2} \tag{1}$$

teljesül minden $-1\leq x\leq 1$ számra. Belátjuk, hogy ekkor $a=0$, $b=-\frac{1}{2}$.

Az x^2+ax+b függvény a $[-1,1]$ intervallumon abszolút értékének maximumát vagy az intervallum valamelyik szélén, vagy – amennyiben az a $[-1,1]$ intervallumhoz tartozik – az x^2+ax+b parabola csúcsában veszi föl. Az

$$x^2+ax+b=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+b-\frac{a^2}{4}$$

átalakítás mutatja, hogy a parabola csúcsa az $x=-\frac{a}{2}$ pontban van. Célszerűnek látszik tehát (1)-et a -1; $+1$ és $-\frac{a}{2}$ pontokban felírni (ha $\left|-\frac{a}{2}\right|\leq 1$). Lássuk előbb $+1$-re és -1-re:

$$-\frac{1}{2}\leq 1+a+b\leq\frac{1}{2}, (2) -\frac{1}{2}\leq 1-a+b\leq\frac{1}{2}. (3)$$

(3)-ból

$$-\frac{1}{2}\leq -1+a-b\leq\frac{1}{2},$$

ezt (2)-höz adva

$$-1\leq 2a\leq 1,$$

azaz

$$|a|\leq\frac{1}{2}.$$

Ezek szerint a parabola csúcsa a $[-1,1]$ intervallumba esik, s így felírhatjuk ott is (1)-et:

$$-\frac{1}{2}\leq b-\frac{a^2}{4}\leq\frac{1}{2},$$

amiből

$$b\geq\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}\geq -\frac{1}{2}.$$

(2)-t és (3)-at összeadva azt kapjuk, hogy

$$-1\leq 2+2b\leq 1,$$

aminek jobb oldalából

$$b\leq -\frac{1}{2}.$$

Ezek alapján

$$-\frac{1}{2}\geq b\geq\frac{a^2}{4}-\frac{1}{2}\geq -\frac{1}{2},$$

ami csak úgy állhat fönn, ha

$$b=-\frac{1}{2},\qquad a=0;$$

ekkor x^2+ax+b-re

$$\max_{x\in[-1,1]}|x^2+ax+b|=\max_{x\in[-1,1]}\left|x^2-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}.$$