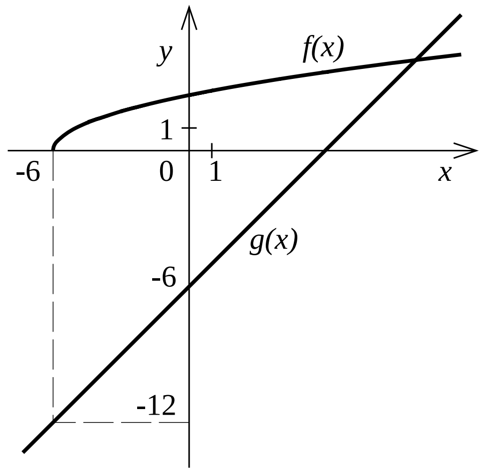
Ábrázoljuk az

$$f(x)=\sqrt{x+6}\quad (\text{ÉT: } x\ge -6)\quad \text{és a}\quad g(x)=x-6\quad (\text{ÉT: } x\in \mathbf{R})$$

függvényeket ugyanabban a koordináta-rendszerben.



Az egyenlőtlenség megoldás-halmazának elemei csak a -6-nál nem kisebb valós szám közül kerülhetnek ki. $f(-6)=0$, $g(-6)=-12$, tehát $x=-6$-nál az egyenlőtlenség teljesül.

Mindkét függvény szigorúan monoton növekedő, de egy kis kezdeti szakaszt leszámítva $f(x)$ lassabban nő, mint $g(x)$. Számítsuk ki, hogy hol „éri utol” $g(x)$ az $f(x)$-et. A

$$\sqrt{x+6}=x-6\qquad (x\ge -6)$$

egyenlet „hagyományos” megoldása mindkét oldal négyzetre emelésével történik, amelynek révén következmény egyenletet kapunk. Az

$$x+6=(x-6)^2$$

egyenlet gyökei között az eredeti egyenlet gyökét (gyökeit) megtaláljuk, de hamis gyök is felléphet. (A négyzetre emelés nem ekvivalens átalakítás.) A kapott

$$x^2-13x+30=0$$

másodfokú egyenlet gyökei: $x_1=10$, $x_2=3$. Ez utóbbi hamis gyök. Az eredeti egyenletet $x_1=10$ kielégíti, $x_2=3$ viszont nem.

Mindezek alapján az egyenlőtlenség megoldása:

$$-6\le x<10.$$

Hegedűs Dalma (Siófok, Perczel Mór Gimn., I. o.t.)

Megjegyzés. Nagyon sokan beleestek a csapdába, mivel nem ellenőrizték a gyököket, így számukra nem derült ki, hogy a 3 hamis gyök. Talán könnyebben leleplezódik a hamis gyök, ha a $\sqrt{x+6}=x-6$ egyenletet az

$$(x+6)-\sqrt{x-6}-12=0$$

alakban írjuk. Ez $\sqrt{x+6}$-ban másodfokú egyenlet. A megoldóképlet alapján

$$\sqrt{x+6}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\begin{cases}4,\\-3.\end{cases}$$

Mivel $\sqrt{x+6}\ge 0$, azért csak $\sqrt{x+6}=4$, vagyis $x=10$ felel meg.