Jelöljük a tetraéder éleinek felezőpontjait az *ábrán* látható módon J, K, E, O, Z, X-szel. A csúcsban szomszédos élek felezőpontjait összekötő szakaszok a tetraéder egy-egy háromszöglapjának középvonalai, ezért párhuzamosak a tetraéder egy-egy élével, hosszuk pedig a megfelelő él hosszának a fele. Így

$$ZX = EO = \frac{AB}{2}; \qquad ZE = OX = \frac{CD}{2};$$
$$KZ = OJ = \frac{AC}{2}; \qquad KX = EJ = \frac{BC}{2};$$
$$EK = XJ = \frac{AD}{2} \quad \text{és} \quad ZJ = KO = \frac{BD}{2}.$$

Ebből az is következik, hogy az $EOXZ$, $KZJO$ és $KEJX$ négyszögek paralelogrammák, mert szemközti oldalaik párhuzamosak és egyenlő hosszúak.

Ismert, hogy egy paralelogramma átlóinak négyzetösszege megegyezik oldalainak négyzetösszegével. Ezért

$$EX^2+ZO^2=EO^2+OX^2+ZX^2+ZE^2=\frac{1}{2}\left(AB^2+CD^2\right), (1) ZO^2+KJ^2=ZJ^2+OJ^2+KO^2+KZ^2=\frac{1}{2}\left(AC^2+BD^2\right), ($$

Az (1) egyenletből a (2)-t, illetve a (3)-at kivonva és felhasználva a tetraéder élhosszai közti egyenlőtlenségeket, kapjuk, hogy

$$EX^2 - KJ^2 = \frac{1}{2}[(AB^2 + CD^2) - (AC^2 + BD^2)] = \frac{1}{2}[(AB^2 - AC^2) + (CD^2 - BD^2)] > 0, ZO^2 - KJ^2 = \frac{1}{2}[(AB^2 + CD^2) - (BC$$

Tehát $EX > KJ$ és $ZO > KJ$.

Vagyis a szemközti élpárok felezőpontjait összekötő szakaszok közül az AB és CD – a leghosszabb élek – felezőpontjait összekötő szakasz a legrövidebb.

Zám Katalin (Eger, Szilágyi E. Gimn., I. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Az (1)–(3) egyenletrendszerből könnyen kifejezhetjük a szemközti élpárok felezőpontjait összekötő szakaszok hosszát a tetraéder éleivel. Például:

$$KJ^2 = \frac{1}{4}\left(AC^2 + BC^2 + AD^2 + BD^2 - AB^2 - CD^2\right).$$