

Jelöljük az  $A, B, C$  pontok  $S$ -en lévő merőleges vetületét  $A', B', C'$ -vel. Ha  $P$  eleget tesz a feltételeknek, és különbözik az  $A', B', C'$  pontoktól, akkor  $\angle APA' = \angle BPB' = \angle CPC'$ , vagyis az  $\triangle APA', \triangle BPB'$  és  $\triangle CPC'$  derékszögű háromszögek hasonlóak. Ezért

$$\frac{A'P}{B'P} = \frac{AA'}{BB'} \quad (1) \text{ és } \quad \frac{A'P}{C'P} = \frac{AA'}{CC'} \quad (2)$$

Ismert, hogy azon pontok halmaza a síkban, amelyeknek két rögzített ponttól mért távolságának aránya  $e$ , egy egyenes, ha  $e = 1$  (a két rögzített pont által meghatározott szakasz felezőmerőlegese); illetve egy kör, ha  $e \neq 1$  (a két rögzített ponthoz és  $e$ -hez tartozó *Apollóniusz-kör*).

Tehát ha  $A'$ ,  $B'$  és  $C'$  három különböző pont, akkor  $P$  nyilván egyikükkel sem eshet egybe,  $S$ -nek  $A'$ ,  $B'$  és  $C'$ -től különböző pontjai közül pedig 2, 1 vagy 0 tesz eleget a feltételeknek, attól függően, hogy az  $\frac{AA'}{BB'}$  és az  $\frac{AA'}{CC'}$  arányokhoz és az  $(A', B')$ , illetve  $(A', C')$  pontpárokhoz tartozó Apollóniusz-köröknek vagy szakaszfelező merőlegeseknek hány közös pontjuk van. (Ha valamely  $P$  pontra (1) és (2) teljesül, akkor az ezekből következő  $\frac{B'P}{C'P} = \frac{BB'}{CC'}$  is teljesül, tehát  $P$  rajta van a  $(B, C)$  pontpárhoz tartozó körön van egyenesen is.) Ha  $A' \equiv B' \equiv C'$ , akkor  $S$  minden pontja jó, ha  $A$ ,

$B$  és  $C$   $S$ -től való távolságai egyenlők (ekkor a pontok közül legalább kettő egybeesik); míg ha e távolságok közt van legalább két különböző, akkor csak a  $P \equiv A' \equiv B' \equiv C'$  pont jó. Végül ha  $A'$ ,  $B'$  és  $C'$  közül kettő – feltehetjük, hogy  $A'$  és  $B'$  – egybeesik, a harmadik pedig ettől különböző, akkor nincs megfelelő pont, ha  $A$  és  $B$   $S$ -től való távolsága nem egyenlő; ha pedig ez a két távolság egyenlő, akkor a megfelelő pontok az  $\frac{AA'}{CC'}$  arányhoz és az  $(A', C')$  pontpárhoz tartozó kört vagy egyenest alkotják.