A leképzés nyilván *injektív (kölcsönösen egyértelmű)* hiszen ha két különböző pont képe ugyanaz a pont lenne, akkor egy, e két pontot csúcsként tartalmazó téglalap négy csúcsának képe nem lehetne egy téglalap négy csúcsa. Jelöljük a feladatbeli leképzést a továbbiakban φ-vel. Állításunkat a következő lépéseken keresztül látjuk be.

(1) *A φ leképzés derékszögű háromszöget tart, azaz bármely derékszögű háromszög három csúcsának képe egy derékszögű háromszög három csúcsa.* Legyenek ugyanis A, B, C egy derékszögű háromszög csúcsai. Egészítsük ki a háromszöget egy $ABCD$ téglalappá, ekkor $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$, $\varphi(D)$ egy téglalap csúcsai, így közülük bármelyik három egy derékszögű háromszög három csúcsa.

(2) *A φ megtartja a kollinearitást, pontosabban: ha az x, y, z pontok egy egyenesen fekszenek, akkor $\varphi(x)$, $\varphi(y)$, $\varphi(z)$ is egy egyenesen van.*

A) Tegyük fel először, hogy az A, B, C pontok nem kollineárisak. Ekkor csak véges sok olyan P pont van, amelyre az ABP, ACP, BCP háromszögek közül legalább kettő derékszögű. Ha ugyanis az ABP háromszög derékszögű, akkor P vagy az AB mint átmérő „fölé” rajzolt Thalész-körön van, vagy az AB szakaszra annak valamelyik végpontjában emelt merőlegesen; hasonló igaz az ACP és BCP háromszögre is. A három Thalész kör nyilván különböző, és – az A, B, C-re tett feltevés miatt – ugyanez igaz a hat egyenesre is. A két kör és hat egyenes közül ezért bármely kettőnek csak véges sok közös pontja lehet.

B) Ha A, B, C egy egyenesen vannak, akkor végtelen sok olyan P pont létezik, amelyre az ABP, ACP, BCP háromszögek közül legalább kettő derékszögű; ilyen például a három pont közös egyenesére A-ban, B-ben vagy C-ben emelt merőleges bármely pontja.

Tegyük fel ezután, hogy X, Y, Z kollineáris ponthármas. B) szerint végtelen sok olyan P pont van, amelyre az XYP, XZP, YZP háromszögek közül legalább kettő derékszögű, és minden ilyen P-re $\varphi(P)$ is ilyen tulajdonságú pont lesz $\varphi(X)$, $\varphi(Y)$, $\varphi(Z)$-hez (1) miatt. Végtelen sok ilyen $\varphi(P)$ van, hiszen φ injektív; ezért A) miatt a $\varphi(X)$, $\varphi(Y)$, $\varphi(Z)$ hármas is kollineáris.

(3) *φ megtartja az egy egyenesen lévő pontok rendezését.*

A) Ha X, Y, Z különbözők és egy egyenesen vannak, akkor pontosan két olyan R pont van, amelyre az XYR, XZR, YZR háromszögek mindegyike derékszögű. Ha például Y az X és Z között helyezkedik el, akkor R csak az XZ szakasz Thalész-körének és az XZ-re Y-ban állított merőlegesnek a (két) metszéspontja lehet. (A másik két Thalész-kör nem metszi a harmadik pontban állított merőlegest lásd. *1. ábra.*) Megállapíthatjuk, hogy az R_1XR_2, R_1YR_2, R_1ZR_2 hármasok közül egyedül R_1YR_2 kollineáris.

B) Tegyük fel, hogy a páronként különböző A, B, C pontok egy egyenesen fekszenek, és B az A és C között helyezkedik el. Tekintsük azokat – az A) szerint kizárólagosan létező – P_1 és P_2 pontokat, amelyekre ABP_1, ACP_1, BCP_1, ABP_2, ACP_2, BCP_2 mindegyike derékszögű. Mivel φ kölcsönösen egyértelmű, azért $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$ is különbözőek, és (2) miatt kollineárisak. Az (1) szerint $\varphi(P_1)$ és $\varphi(P_2)$ az a két (különböző) pont, amely $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$ közül bármelyik kettővel derékszögű háromszöget határoz meg. Az A) szerint így a $\varphi(P_1)\varphi(A)\varphi(P_2)$, $\varphi(P_1)\varphi(B)\varphi(P_2)$, $\varphi(P_1)\varphi(C)\varphi(P_2)$ ponthármasok közül egyedül az kollineáris, amelyik $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$ közül a közbülső helyzetű pontot tartalmazza. Azonban feltevésünkből következik, hogy a P_1, B, P_2 pontok egy egyenesen vannak, ezért (2) szerint a $\varphi(P_1)$, $\varphi(B)$, $\varphi(P_2)$ pontok is egy egyenesen fekszenek. Az A)-beli megállapítás értelmében ez csak úgy lehet, hogy $\varphi(B)$ a $\varphi(A)$ és $\varphi(C)$ között helyezkedik el.

(4) *φ felezőpontot tart, azaz, ha Y az R_1R_2 szakasz felezőpontja, akkor a $\varphi(R_1)\varphi(R_2)$ szakasz felezőpontja $\varphi(Y)$.*

Tegyük fel, hogy az R_1R_2 szakasz felezőpontja Y. Ekkor található két olyan (egymástól és Y-tól különböző) X és Z pont, amelyek által meghatározott szakasznak az Y belső pontja, és amelyre az R_jXY, R_jXZ, R_jYZ háromszögek mindegyike derékszögű. A (3) miatt ekkor $\varphi(Y)$ a $\varphi(X)\varphi(Z)$ szakasz belső pontja, és (1) szerint a $\varphi(R_j)\varphi(X)\varphi(Y)$, $\varphi(R_j)\varphi(X)\varphi(Z)$, $\varphi(R_j)\varphi(Y)\varphi(Z)$ háromszögek mindegyike derékszögű. A 3A)-ban láttuk, hogy ekkor $\varphi(R_1)$ és $\varphi(R_2)$ nem más, mint a $\varphi(X)\varphi(Z)$ szakasz Thalész-körének a $\varphi(X)\varphi(Z)$-re $\varphi(Y)$-ban állított merőlegessel való két metszéspontja. A két metszéspont a kör $\varphi(X)\varphi(Z)$ átmérőjére szimmetrikus helyzetű lévén $\varphi(X)$ felezi a $\varphi(R_1)\varphi(R_2)$ szakaszt. A bizonyított (4) tulajdonság következménye, hogy ha egy szakaszt n egyenlő részre osztunk, akkor az osztópontok képei a végpontok képei által meghatározott szakaszt n egyenlő részre osztják.

(5) *Ha A, B, C, D egy négyzet négy csúcsa, amelyek ebben a sorrendben követik egymást, és a négyzet középpontja K, akkor $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$, $\varphi(D)$ is egy négyzet négy egymást ebben a sorrendben követő csúcsa, és a $\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\varphi(D)$ négyzet középpontja $\varphi(K)$.*

A $\varphi(A)$, $\varphi(B)$, $\varphi(C)$, $\varphi(D)$ pontok szükségképpen egy téglalap csúcsai (*2. ábra*). Az AC és BD szakaszok közös felezőpontja K, ezért φ kölcsönös egyértelműsége és (4) miatt $\varphi(K)$ a $\varphi(A)\varphi(C)$ és $\varphi(B)\varphi(D)$ szakaszok közös felezőpontjaként a téglalap középpontja, mivel $\varphi(A)\varphi(C)$ és $\varphi(B)\varphi(D)$ csak átlók lehetnek. Mivel AKB derékszögű háromszög, azért $\varphi(A)\varphi(K)\varphi(B)$ is derékszögű háromszög (1) miatt.

Így a $\varphi(A)\varphi(B)\varphi(C)\varphi(D)$ téglalap négyzet.

(6) Vegyünk fel a síkon egy O kezdőpontú derékszögű koordinátarendszert, a koordinátatengelyek E_1, E_2 pontjaira legyen $\overline{OE_1} = \overline{OE_2} = 1$ (*3. ábra*). A $\varphi(E_1)\varphi(O)\varphi(E_2)$ háromszög egyenlőszárú derékszögű (5) miatt; legyen $\overline{\varphi(O)\varphi(E_1)} = \overline{\varphi(O)\varphi(E_2)} = e$, és tekintsük a $\varphi(E_1)$, $\varphi(E_2)$, $\varphi(O)$ pontok által meghatározott koordinátarendszert. Legyen PQ egy tetszőleges szakasz, a P és Q pontok merőleges vetületeit a koordinátatengelyekre jelölje P_1, Q_1, P_2, Q_2. Az (5) bizonyításából látható, hogy minden téglalap egymást követő csúcsainak φ-nél vett képei a megfelelő téglalap egymást követő csúcsai, φ-től függően vagy mindig az eredetivel azonos, vagy mindig azzal ellentétes körüljárásban. Ezért a $\varphi(P)$, $\varphi(Q)$ pontok merőleges vetületei az „új” koordinátarendszer tengelyeire $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2)$, $\varphi(Q_1)$, $\varphi(Q_2)$.

Legyen n tetszőleges pozitív egész szám, és mérjük fel az OP_1 szakaszra O-tól kezdve az egységszakasz $(\overline{OE_1})$ $\frac{1}{n}$-szeresét a lehető legtöbbször; tegyük fel, hogy ezt k-szor tudtuk megtenni, így $\frac{k}{n} \leq \overline{OP_1} < \frac{k+1}{n}$. Ekkor (4) miatt az e hosszúságú $\varphi(O)\varphi(E_1)$ szakasz $\frac{1}{n}$-szeresét is k-szor tudjuk rámérni a $\varphi(O)\varphi(P_1)$ szakaszra (felhasználva (4)-nek azt a következményét is, hogy ha egy AB szakasz P pontjára $\overline{AP} < \overline{PB}$ teljesül, akkor a PB szakasz $\overline{AP} = \overline{PA_1}$ egyenlőséget kielégítő A_1 pontjával $\overline{\varphi(A)\varphi(P)} = \overline{\varphi(P)\varphi(A_1)} < \overline{\varphi(P)\varphi(A_1)} + \overline{\varphi(A_1)\varphi(B)} = \overline{\varphi(P)\varphi(B)}$). Ezért

$$k\frac{e}{n} \leq \overline{\varphi(O)\varphi(P_1)} < (k+1)\frac{e}{n},$$

tehát

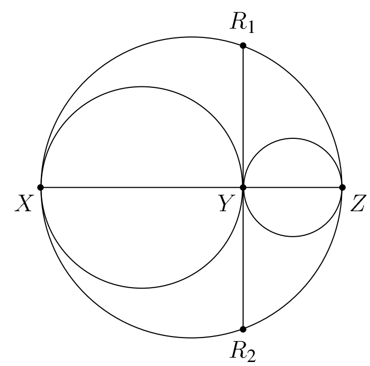
$$\left|\overline{OP_1} - \frac{1}{e}\overline{\varphi(O)\varphi(P_1)}\right| < \frac{1}{n}.$$

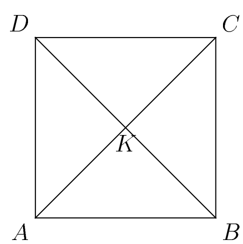
Mivel ez minden n pozitív egészre elmondható, $\overline{\varphi(O)\varphi(P_1)} = e \cdot \overline{OP_1}$ adódik, akárcsak $\overline{\varphi(O)\varphi(P_2)} = e \cdot \overline{OP_2}$, $\overline{\varphi(O)\varphi(Q_1)} = e \cdot \overline{OQ_1}$, $\overline{\varphi(O)\varphi(Q_2)} = e \cdot \overline{OQ_2}$. Tehát

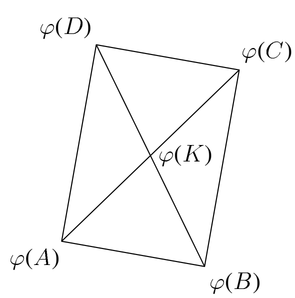
$$\overline{\varphi(P)\varphi(Q)} = \sqrt{\overline{\varphi(P_1)\varphi(Q_1)}^2 + \overline{\varphi(P_2)\varphi(Q_2)}^2} == \sqrt{\left(\overline{\varphi(O)\varphi(Q_1)} - \overline{\varphi(O)\varphi(P_1)}\right)^2 + \left(\overline{\varphi(O)\varphi(Q_2)} - \overline{\varphi(O)\varphi(P_2)}\right)^2} == \sqrt{\left[e\left(\overline{OQ_1} - \right.\right.}$$

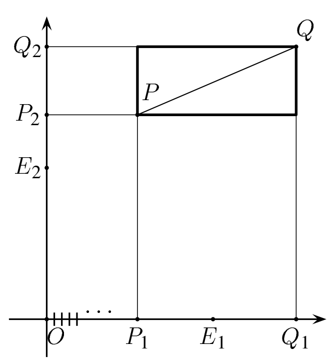
a P és Q pontok választásától függetlenül.

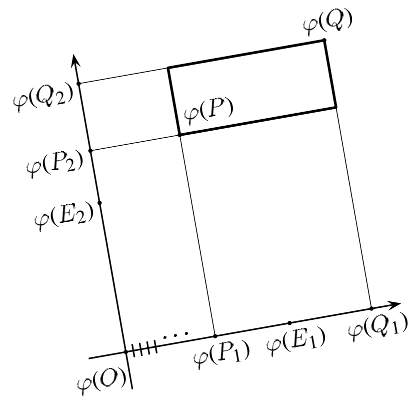
Ezzel beláttuk, hogy a síktranszformáció (1)–(5) pontokban leírt tulajdonságaiból következik, hogy az egyben hasonlósági transzformáció is.










$\varphi(Q)$
$\varphi(Q_2)$
$\varphi(P)$
$\varphi(P_2)$
$\varphi(E_2)$
$\varphi(O)$
$\varphi(P_1)$
$\varphi(E_1)$
$\varphi(Q_1)$