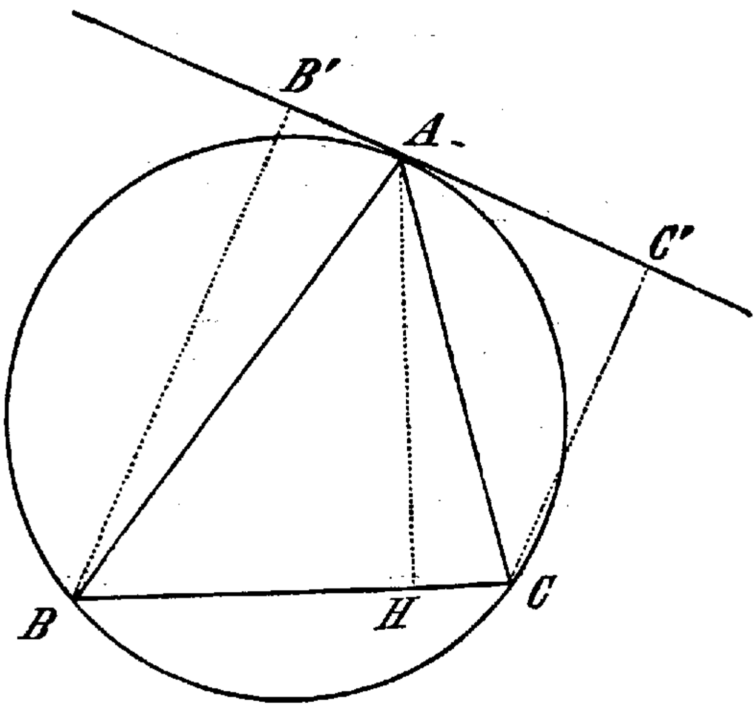

A keresett felület

$$f = \pi(BB' + CC')BC.$$

Az ABB' és CAH, illetőleg a CAC' és ABH háromszögek hasonlóságából következik, hogy:

$$BB' : AB = AH : CA,$$

és

$$CC' : CA = AH : AB;$$

továbbá

$$BB' = \frac{ch}{b},$$

$$CC' = \frac{bh}{c},$$

$$f = \pi ah\frac{b^2 + c^2}{bc},$$

$$f = \pi 2S\frac{b^2 + c^2}{bc};$$

hol S az ABC háromszög területét jelenti.

A keresett térfogat

$$t = \frac{1}{3}\pi B'C'\{\overline{BB'}^2 + BB' \cdot CC' + \overline{CC'}^2\} - \frac{1}{3}\pi\overline{BB'}^2 \cdot AB' - \frac{1}{3}\pi\overline{CC'^2} \cdot AC'$$

$$t = \frac{1}{3}\pi\overline{BB'}^2 \cdot AC' + \frac{1}{3}\pi BB' \cdot CC'\{AB' + AC'\} + \frac{1}{3}\pi\overline{CC'}^2 \cdot AB'$$

$$t = \frac{1}{3}\pi BB' \cdot AC'\{BB' + CC'\} + + \frac{1}{3}\pi CC' \cdot AB'\{CC' + BB'\},$$

$$t = \frac{1}{3}\pi\{BB' + CC'\}\{BB' \cdot AC' + CC' \cdot AB'\}.$$

Az ABB' és CAH, illetőleg a CAC' és ABH háromszögek hasonlóságából következik még, hogy:

$$AB' : AB = CH : CA,$$

$$AC' : CA = BH : AB;$$

$$AB' = \frac{c}{b}CH;$$

$$AC' = \frac{b}{c} BH.$$

De a Carnot-tétel alapján:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2aBH$$

,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2aCH;$$

$$BH = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a},$$

$$CH = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a};$$

s így

$$AB' = \frac{c}{2ab} \{a^2 + b^2 - c^2\},$$

$$AC' = \frac{b}{2ac} \{c^2 + a^2 - b^2\};$$

és

$$BB' \cdot AC' + CC' \cdot AB' = \frac{h}{2a} \{a^2 + b^2 - c^2 + c^2 + a^2 - b^2\},$$

$$ah = 2S.$$

Tehát

$$t = \frac{1}{3} \pi 2S \frac{b^2 + c^2}{bc} h = \frac{1}{3} h \cdot f$$

$$t = \frac{1}{3} \pi \frac{4S^2}{abc} (b^2 + c^2)$$