Induljunk ki az ismert

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\,\alpha\,\cos\,\beta+\cos\,\alpha\,\sin\,\beta$$

képletből. Jelen esetben

$$\sin\alpha=x,\qquad \text{tehát}\qquad \cos\alpha=\sqrt{1-x^2};$$
$$\sin\beta=y,\qquad \text{tehát}\qquad \cos\beta=\sqrt{1-y^2};$$

és így képletünk így is írható:

$$z=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.$$

Kétszeri négyzetre emelés után a gyökjel eltűnik és nyerjük az x, y és z közötti, trigonometriai és gyökjelek nélküli kapcsolatot:

$$z^4-2z^2(x^2+y^2-2x^2y^2)+(x^2-y^2)^2=0.$$

Minthogy ez az egyenlet z-re nézve negyedfokú, azért z-nek általában 4 értéke van. 4-nél kevesebb értéket vesz fel, ha

(1) az egyenlet bal oldala teljes négyzet,
(2) az abszolut tag $=0$,
(3) z^2 együtthatója $=0$,
(4) az abszolut tag és z^2 együtthatója $=0$.

(1) Az egyenlet többtagúja teljes négyzet, ha

$$4(x^2+y^2-2x^2y^2)^2=4(x^2-y^2)^2$$

vagy

$$(x^2+y^2-2x^2y^2)^2-(x^2-y^2)^2=0,$$

amiből

$$4x^2y^2(1-x^2)(1-y^2)=0.$$

Ez az egyenlőség akkor áll fenn, ha:

$$(a)\,x=0,\qquad (b)\,x=\pm1,\qquad (c)\,y=0,\qquad (d)\,y=\pm1.$$

Ez esetben z-re két értéket kapunk.

(2) Az abszolut tag $=0$, ha $x=\pm y$, akkor egyenletünk ily alakra hozható

$$z^4-4z^2(x^2-x^4)=0,$$

amiből

$$z_1=z_2=0,\qquad z_3=2x\sqrt{1-x^2},\qquad z_4=-2x\sqrt{1-x^2}.$$

Ez esetben tehát z három értéket vesz fel.

(3) és (4) z^2 együtthatója $=0$, ha

$$x^2-2x^2y^2+y^2=0 \tag{1}$$

Ez az egyenlőség azonban csak akkor állhat fenn, ha

$$x^2=y^2.$$

(1) u. i. még a következő alakokra hozható

$$\frac{x^2}{y^2}=2x^2-1\qquad \text{és}\qquad \frac{y^2}{x^2}=2y^2-1.$$

Ha már most $x^2>y^2$, akkor

$$\frac{x^2}{y^2}=2x^2-1>1\qquad \text{vagy}\qquad x^2>1.$$

Ha pedig $y^2>x^2$, akkor

$$\frac{y^2}{x^2}=2y^2-1>1\qquad \text{vagy}\qquad y^2>1.$$

Ámde az $x^2>1$ és $y^2>1$ egyenlőtlenségek abszurdumot fejeznek ki, mert feltételünk értelmében x és y, s velük együtt x^2 és y^2 is valódi törtek. Kell tehát, hogy $x^2=y^2$ legyen. Ezt tekintetbe véve (1)-ből erednek a következő gyökpárok:

$$(a)\, x=y=0, \qquad (b)\, x=1,\ y=1, \qquad (c)\, x=1,\ y=-1.$$
$$(d)\, x=-1,\ y=1, \qquad (e)\, x=-1,\ y=-1.$$

Ebben az esetben azonban $(x^2-y^2)^2=0$, tehát az egyenlet a

$$z^4=0$$

egyenletre redukálódik, a honnan z egyetlen értéke $z=0$.

Látnivaló, hogy ez az eset magába foglalja az utolsó esetet is, amikor mind az abszolut tag, mind pedig z^2 együtthatója $=0$.

Tehát z értékváltozásait a következőkben foglalhatjuk össze:

z-nek általában 4 értéke van, ha azonban

I. $x=\pm y$ és sem x, sem y nem egyenlő 0, vagy ± 1, akkor z-nek 3 értéke van;

II.

$$(a)\ x=0, \qquad (b)\ y=0,$$
$$(c)\ x=\pm 1, \qquad (d)\ y=\pm 1,$$

akkor z 2 értéket vesz fel, s

III.

$$(a)\ x=y=0, \qquad (b)\ x=1,\ y=1, \qquad (c)\ x=1\ y=-1,$$
$$(d)\ x=-1,\ y=1, \qquad (e)\ x=-1,\ y=-1,$$

akkor z-nek csak egy értéke van.

(Hajdu Pál, Budapest.)