I. Megoldás.

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\ \sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}},$$
$$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$$

s így

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc};$$

számlálót és nevezőt s-sel szorozva:

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{abc\cdot s}=\frac{T^2}{abc\cdot s}.$$

De

$$R=\frac{abc}{4T}\text{ és }r=\frac{T}{s}$$

s így

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=\frac{r}{4R},$$

ahol r a háromszögbe, R a háromszög köré ír kör sugara; mivel pedig $r<R$, azért

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}<\frac{1}{4}.$$

II. Megoldás.

$$\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2}\right)=$$
$$=\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}=$$
$$=\frac{1}{4}\cdot\sin A\cdot\sin B-\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2};$$

minthogy $\sin A$ és $\sin B$ legnagyobb értéke $=1$, azért

$$\frac{1}{4}\cdot\sin A\cdot\sin B<\frac{1}{4},$$

tehát minthogy $\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}$ positív: annál is inkább áll, hogy:

$$\frac{1}{4}\cdot\sin A\cdot\sin B-\sin^2\frac{A}{2}\cdot\sin^2\frac{B}{2}=\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}<\frac{1}{4}.$$

III. Megoldás.

$$=\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}=\frac{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}{8\cdot\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}}=$$
$$=\frac{\sin A\cdot\sin B\cdot\sin C}{2\cdot(\sin A+\sin B+\sin C)}=\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C)}.$$

De

$$\sin 2A<2\sin A,\ \sin 2B<2\sin B,\ \sin 2C<2\sin C$$

s így

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C<2(\sin A+\sin B+\sin C),$$

miből

$$\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C}<2$$

ezen egyenlőtlenség mindkét oldalá-t 8-czal osztva:

$$\frac{1}{8}\cdot\frac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C}<\frac{1}{4}.$$