Első megoldás.

A háromszög oldalai; a, $a+d$, $a+2d$; a Δ területe

$$T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

hol

$$s=\frac{a+b+c}{2}, \qquad s=\frac{3}{2}(a+d)$$

$$[s-(a+d)]=\frac{a+d}{2}, \qquad [s-(a+2d)]=\frac{a-d}{2}$$

Alkalmazva tehát

$$T=\sqrt{\frac{3}{2}(a+d)\left(\frac{a+d}{2}\right)\left(\frac{a-d}{2}\right)\left(\frac{a+3d}{2}\right)}$$

$$T=\frac{a+d}{4}\sqrt{2(a-d)(a+3d).}$$

Vegyük fel, hogy $(a+d)=x$, akkor

$$T=\frac{x}{4}\sqrt{3(x-2d)(x+2d)}$$

$$4T=x\sqrt{3(x^2-4d^2)}$$

$$16T^2=3x^4-12x^2d^2,$$

melyből

$$x=\pm\sqrt{\frac{+12d^2\pm\sqrt{144d^4+192T^2}}{6}}$$

$$x=\pm\sqrt{\frac{6d^2\pm\sqrt{36d^4+48T^2}}{3}}=a+d$$

$$a=-d\pm\sqrt{\frac{6d^2\pm\sqrt{36d^4+48T^2}}{3}},$$

mely egyenletbe d-nek fent adott $d=1$ és T=6 értékeket behelyettesítve, lesz

$$a=-1\pm\sqrt{\frac{6\pm\sqrt{36+1728}}{3}}$$

$$a=-1\pm\sqrt{\frac{6\pm\sqrt{1764}}{3}}$$

$$a=-1\pm\sqrt{\frac{6\pm 42}{3}}$$

$$a=-1\pm 4$$

$$a=3;\ \ a+d=4;\ \ a+2d=5,$$

az a háromszög tehát derékszögű háromszög, melynek átfogója 5.

A szögekre nézve pedig

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Minthogy azonban derékszögű háromszögről van szó, azért én a

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}$$

képletet használhatom

$$\sin\alpha=\frac{3}{5}$$

$$\log\sin\alpha=\log 3-\log 5$$

$$\log 3=0,47712$$

$$\log 5=\underline{0,69897}$$

$$\log \sin \alpha = 9,77815 - 10$$

$$\alpha = 36°52'10,71''; \ \beta = 90 - \alpha = 53°7'49,29''$$

Seidner Mihálynak a math. és phys. társulat I. versenyén az I. b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozata.

Második megoldás.

Legyen a 3-szög egyik oldala $= b$, akkor $a = b - d$ és $c = b + d$, továbbá

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{3b}{2}; \quad s - a = \frac{b}{2} + d, \quad s - b = \frac{b}{2}, \quad s - c = \frac{b}{2} - d,$$

s mivel

$$t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

azért

$$\frac{3b^2}{4}\left(\frac{b}{2} + d\right)\left(\frac{b}{2} - d\right) = t^2$$

s innen

$$\frac{3b^2}{4}\left(\frac{b^2}{4} - d^2\right) = t^2$$

és

$$b^4 - 4b^2d^2 = \frac{16t^2}{3}$$

s ebből

$$b = \sqrt{2d^2 + \sqrt{4d^4 + \frac{16t^2}{3}}} = \sqrt{2\left(d^2 + \sqrt{d^2 + \frac{4t^2}{3}}\right)}$$

A gyökjelek előtt azért alkalmazunk + jelt, mert b-nek tagadó és imaginarius szám nem felelhet meg.

Az utolsó képlet alapján

$$a = b - d = -d + \sqrt{2\left(d^2 + \sqrt{d^4 + \frac{4t^2}{3}}\right)}$$

és

$$c = b + d = d + \sqrt{2\left(d^2 + \sqrt{d^4 + \frac{4t^2}{3}}\right)}.$$

Az ismeretlen szögeket legczélszerűbben a $t = \frac{bc}{2} \sin \alpha$ és $t = \frac{ac}{2} \sin \beta$ és $\gamma = 180° - \alpha - \beta$ képletek alapján határozhatjuk meg, a honnan

$$\sin \beta = \frac{2t}{ac}, \qquad \sin \alpha = \frac{2t}{bc}.$$

Ha $d = 1$ és $t = 6$, akkor

$$b = \sqrt{2\left(d^2 + \sqrt{d^4 + \frac{4t^2}{3}}\right)} = \sqrt{2\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4,36}{3}}\right)} =$$

$$= \sqrt{2(1 + \sqrt{49})} = 4$$

$a = b - d = 3, \quad c = b + d = 5$. Tehát $a = 3, \quad b = 4, \quad c = 5$.

A szögekre nézve:

$$\sin \alpha = \frac{2t}{bc} = \frac{2 \cdot 6}{20} = \frac{3}{5}$$

$$\log 3 = 0,477121$$

$$\underline{- \log 5 = 0,698970}$$

$$\log \sin \alpha = 9,778151 - 10$$

$$\frac{14}{32} : 2,81 =$$

$$\alpha = 36°52'12''$$

$$\sin \beta = \frac{2t}{bc} = \frac{4}{5}$$

$$\log 4 = 0,602060$$

$$\underline{\log 5 = 0,698970}$$

$$\log \sin \beta = 9,903090 - 10$$

$$\frac{19}{76} : 1,58 = 48$$

$$\beta = 53^\circ 7' 48''$$

Mivel pedig $\alpha + \beta = 90^\circ$, azért $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$.

Pap Pálnak a math. és phys. társulat I. versenyén a II. b. Eötvös-díjjal jutalmazott dolgozata.