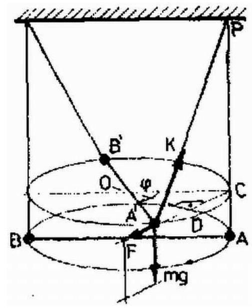
Az 1. ábrára felrajzoltuk a φ szöggel ($\varphi = A'OC\sphericalangle$) elfordított pálca helyzetét és az egyik golyóra ható erőket.



1. ábra

Mivel a pálca végén levő golyó egyensúlyban van, a rá ható erők eredője zérus. Az elforgatáshoz szükséges erőt az ábrán F-fel jelöltük. F és az mg súlyerő eredője a fonálban ébredő K erővel azonos nagyságú, azzal ellentétes irányú. Az ábrából látható, hogy a fenti három erőből alkotott háromszög hasonló az $A'PC$ háromszöggel, így

(1)
$$\frac{F}{mg} = \frac{\overline{A'C}}{\overline{PC}}.$$

Az $A'OC$ háromszögből $\overline{A'C} = 2 \cdot R \cdot \sin\dfrac{\varphi}{2}$ és az $A'PC$ derékszögű háromszögből a Pitagorasz–tétel segítségével

$$\overline{PC} = \sqrt{L^2 - \left(2R\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2}.$$

(1)-ből a fentiek alapján

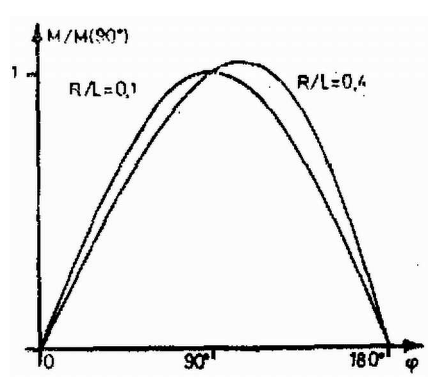
(2)
$$F = mg\frac{2R \cdot \sin\dfrac{\varphi}{2}}{\sqrt{L^2 - \left(2R\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)^2}}.$$

A másik golyóra ugyanilyen nagyságú, de ellentétes irányú erőt kell kifejteni, így a két erő erőpárt alkot. Az erőpár forgatónyornatéka:

(3)
$$M = F \cdot 2 \cdot \overline{OD},$$

ahol $\overline{OD} = R \cdot \cos\dfrac{\varphi}{2}$. Az F erő (2) alakját (3)-ba írva a forgatónyomatékra az alábbi kifejezést kapjuk:

(4)
$$M = mg\frac{2R^2\sin\varphi}{\sqrt{L^2 - 4R^2\sin\dfrac{2\varphi}{2}}}.$$



2. ábra

A 2. ábrán $R/L = 0{,}1$ ill. $R/L = 0{,}4$ értéknél felrajzoltuk a $M(\varphi)$ függvényt. Látható, hogy a görbe maximuma jobbra tolódik a $\varphi = 90°$-os ponthoz képest. A (4) képletből az is látszik, hogy $\varphi = 180°$-os elforgatás csak $R/L < 0{,}5$ esetén lehetséges, mert ellenkező esetben a túl rövid kötél miatt a pálca már $\varphi < 180°$-nál eléri a felfüggesztés síkját. $180°$ felett a két fonál mindenképp összeér, ezért itt az eredményeink már nem érvényesek.

Megjegyzés. A rendszer energiaváltozásából is ki lehet szántani a forgatónyomatékot. Ha egy testre F erő hat és az $\Delta\varphi$ szöggel elfordul a forgáspont körül, akkor $\Delta W = F \cdot \Delta\varphi \cdot r$ a munkavégzés; ahol r az F erő erőkarjának hosszát jelöli. Mivel $F \cdot r$ éppen a forgatónyomaték, így azt kapjuk, hogy $\Delta W = M\Delta\varphi$, azaz $M = \dfrac{\Delta W}{\Delta\varphi}$. Az energiamegmaradás törvénye miatt ΔW egyenlő a rendszer helyzeti energiájának ΔE megváltozásával. (A helyzeti energia általában függ a φ szögtől.) A $\dfrac{\Delta E}{\Delta\varphi}$ hányados annál pontosabban adja meg M értékét, minél kisebb $\Delta\varphi$. Ez matematikailag azt jelenti, hogy

$$M = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\Delta E}{\Delta\varphi} = \frac{dE}{d\varphi}. \tag{5}$$

A forgatónyomaték tehát az E helyzeti energia φ szerinti deriváltjaként is megkapható.

A rendszer helyzeti energiája:

$$E(\varphi) = 2mg \cdot \overline{AC} = 2mg\left(D^2 - \sqrt{L^2 - 4R^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}\right).$$

A differenciálszámításban járatosak az $E(\varphi)$ függvényt deriválva az M forgatónyomatékra éppen a (4) formulát kapják meg.

Kovács Tibor (Lenti, Gönczi F. Gimn., IV. o. t.)