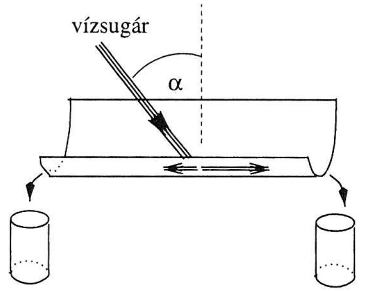
Jelöljük a (mondjuk balról) becsapódó vízsugár sebességét $v$-vel, keresztmetszetét $A$-val, a jobbra, illetve balra kifolyó víz hasonló jellemzőit pedig $v_j$ és $A_j$-vel, illetve $v_b$ és $A_b$-vel! Egységnyi idő alatt (a megfelelő $v$-vel és $A$-val számolva) $vA$ térfogatú víz áramlik át a vízsugár keresztmetszetén. Feladatunk tehát a $(v_bA_b)/(v_jA_j)$ arány és az $\alpha$ beesési szög közötti kapcsolat meghatározása.




A vizsgált jelenség (a vízsugár becsapódása a csatornába, majd szétterülése és két részre válása) teljes általánosságában meglehetősen összetett, bonyolult folyamat, ezért néhány egyszerűsítő feltevéssel élünk. Feltételezzük, hogy az áramlás lamináris, örvények nem (vagy nem számottevő mértékben) keletkeznek. Elhanyagoljuk a víz belső súrlódását, továbbá feltételezzük, hogy az áramlás elég gyors ahhoz, hogy a helyzeti energia változása a mozgási energia mellett ne legyen számottevő. Ezen feltevések jogossága szigorúan nem igazolható, és nyilván beállíthatók olyan kísérleti körülmények, amikor ezek a feltételek nem is teljesülnek. Fennáll azonban az ellenkező eset is: elég gyors, de nem túlságosan gyors áramlásnál, illetve nem túl szűk folyadéksugárnál a leírt feltételek jó közelítésnek tekinthetők.

A $\varrho$ sűrűségű víz áramlására érvényes az anyagmegmaradást kifejező kontinuitási egyenlet:

$$vA\varrho = v_jA_j\varrho + v_bA_b\varrho. \tag{1}$$

Fennáll továbbá a csatornán egységnyi idő alatt átfolyó vízmennyiség vízszintes irányú impulzusának megmaradását kifejező

$$(vA\varrho)v\sin\alpha = (v_jA_j\varrho)v_j - (v_bA_b\varrho)v_b \tag{2}$$

egyenlet is, hiszen a leírt feltételek (a súrlódás elhanyagolása) mellett a csatorna nem fejt ki vízszintes irányú erőt a folyadékra. Az átfolyó folyadék mozgási energiája sem változik meg (ha a helyzeti energia változását és a belső súrlódást nem vesszük figyelembe), így

$$\frac{1}{2}(vA\varrho)v^2 = \frac{1}{2}(v_jA_j\varrho)v_j^2 + \frac{1}{2}(v_bA_b\varrho)v_b^2. \tag{3}$$

Az (1)–(3) egyenletrendszer még nem elegendő a keresett vízhozam-arány meghatározására, még valamilyen további fizikai törvényt és fel kell használnunk. Ismeretes, hogy súrlódásmentes, lamináris folyadékáramlásnál érvényes a Bernoulli-egyenlet, amely szerint a

$$\varrho\frac{v^2}{2} + p + \varrho gh \tag{4}$$

kifejezés értéke egy-egy áramvonal mentén állandó. Alkalmazzuk ezt a törvényt a becsapódó vízsugarat és a jobb (vagy a bal) oldalon kifolyó vízsugarat összekötő valamelyik áramvonalra! Tekintettel arra, hogy a helyzeti energia (a $\varrho gh$-t tag) megváltozását elhanyagoljuk, továbbá tudjuk, hogy a vízsugárban a nyomás (a becsapódási ponttól távol) a külső légnyomással kell megegyezzen, a Bernoulli-törvény a

$$v = v_j, \quad \text{illetve} \quad v = v_b \tag{5}$$

összefüggésekre egyszerűsödik. A Bernoulli-törvény lényegében a mechanikai energia megmaradását fejezi ki, de nem csupán a folyadék egészére (mint a (3) egyenlet), hanem az egyes folyadékdarabkákra külön-külön. A Bernoulli-egyenlet szerint az a – talán meglepő – eredmény adódott, hogy a ferdén becsapódó vízsugár két szétváló ága közül a visszafelé folyó és az előrefelé haladó egyforma sebességgel áramlik, s az energia- és impulzusmegmaradás nem a sebességek, hanem a vízsugarak *keresztmetszetének* megváltozásával teljesül.

Az (1)-(5) egyenletrendszer megoldása:

$$\frac{v_bA_b}{v_jA_j} = \frac{A_b}{A_j} = \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}. \tag{6}$$

Ha $\alpha$=0, akkor nyilván két egyforma részre válik szét a vízsugár, az $\alpha = 90^\circ$ esetén pedig teljes egészében „előrefelé” fog folyni, a közbenső esetekben pedig (6)-nak megfelelő arányban oszlik meg a becsapódó víz mennyisége.

*Borsos Júlia* (Győr, Révai M. Gimn., III. o.t.), *Kacsuk Zsófia* (Budaörs, Illyés Gy. Gimn., IV. o.t.) és *Zawadowski Ádám* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

*Megjegyzések.* 1. A (6) formula alapján kiszámított arányszám jól egyezik a 182. mérési feladatban tapasztaltakkal (lásd a KöMaL 1997. évi 2. számának 124. oldalán közölt grafikont). Ez az egyezés arra utal, hogy a felhasznált közelítések a vizsgált kísérleti körülmények között megengedhetőek.

2. Több versenyző a 182. mérési feladat megoldására hivatkozva felhasználta azt az információt, hogy a víz kb. ugyanakkora sebességgel áramlik mindkét irányban. Megoldásuk – ha nem vizsgálták meg, hogy mi az elméleti háttere ennek az állításnak – kicsit hiányos, 4 pontot kapott.

3. A Bernoulli-törvény alkalmazása során vigyáznunk kell arra, hogy csak egy-egy áramvonal mentén állíthatjuk a (4) kifejezés változatlanságát. Gondoljunk például egy hosszú, zárt, vízzel töltött kémcsőre, melyet az egyik vége körül vízszintes síkban megforgatunk. A helyzeti energia mindenhol ugyanakkora, a folyadék sebessége a gyorsan mozgó végen nagyobb, mint a forgástengely közelében, a folyadék nyomása mégsem csökken le a kémcső külső végében, hanem éppen ezzel ellenkező módon változik: megnő! Bizonyos *speciális esetekben* (örvénymentes, másnéven cirkuláció-mentes áramlásoknál) a (4) kifejezés különböző áramvonalak mentén is ugyanazt az értéket veszi fel, ez azonban általában nem érvényes, s indokolatlan alkalmazása, mint láttuk, hibás következtetésekre vezethet!