Legyen az elektron fenéklap fölötti magassága Δx nagyságrendű, az impulzusának bizonytalansága pedig Δp. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció szerint $\Delta x \cdot \Delta p > \hbar$ ($\hbar$ a Planck-állandó 2π-vel osztott értéke. A határozatlansági összefüggés jobb oldalára néha $\hbar/2$-t írnak. Ennek akkor van jelentősége, ha matematikailag precízen megadjuk, mit jelent Δp és Δx. Itt most csak nagyságrendi becslést keresünk, ezért az ilyen – egységnyi nagyságrendű – tényezőknek nincs jelentősége.)

Az elektron energiája a mozgási energia és a helyzeti energia összegeként kapható meg. A függőleges irányú mozgáshoz tartozó energia

$$E_m \approx \frac{(\Delta p)^2}{2m},$$

a gravitációs helyzeti energia pedig

$$E_h \approx mg(\Delta x).$$

(Az elektron függőleges irányú átlagos p impulzusa nyilván nulla, emiatt p^2 és Δp megegyezik. A helyzeti energia számításánál írhattunk volna $mg(\Delta x)/2$-t is, de ez nagyságrendileg ugyanakkora, mint a fenti érték.) A vízszintes mozgáshoz tartozó energia sem a függőleges mozgás sebességétől, sem pedig (Δx)-től nem függ, ezért a továbbiakban elhagyjuk.

Az elektron teljes energiája

$$E = E_m + E_h \approx \frac{(\Delta p)^2}{2m} + mg(\Delta x).$$

Felhasználva a Heisenberg-relációt, ez így is írható:

$$E > \frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{mg\,\hbar}{\Delta p}.$$

Ha Δp nagy, akkor érthetően nagy lesz az elektron mozgási energiája. Ha viszont Δp kicsi, akkor (a nagy helybizonytalanság miatt) a helyzeti energia válik naggyá, s hiába kicsi a mozgási energia, az összenergia ismét csak nagy lesz. A legkedvezőbb helyzetet, vagyis az összenergia legkisebb értékét differenciálszámítással vagy – elemi úton – a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenség felhasználásával kaphatjuk meg:

$$E > 3 \cdot \frac{\frac{(\Delta p)^2}{2m} + \frac{mg\,\hbar}{2(\Delta p)} + \frac{mg\,\hbar}{2(\Delta p)}}{3} \geq \frac{3}{2}\sqrt[3]{mg^2\,\hbar^2}.$$

Az egyenlőség akkor teljesül, amikor

$$\frac{(\Delta p)^2}{2m} = \frac{mg\,\hbar}{2(\Delta p)},$$

vagyis ha

$$\Delta p = \sqrt[3]{m^2 g\,\hbar} \qquad \text{és} \qquad \Delta x \approx \sqrt[3]{\frac{\hbar^2}{m^2 g}} \approx 1\ \text{mm}.$$

Várkonyi Péter (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Δx itt kiszámított nagysága az atomfizikában szokásos távolságokhoz képest nagyon nagy, makroszkopikus érték. Az atomokban az elektronok helybizonytalansága sokkal kisebb, mert az elektromos vonzóerő sokkal erősebb a gravitációsnál.

2. Az itt leírt jelenség kísérletileg nem figyelhető meg, mert a doboz fenekére „leülő" elektron összenergiája nagyon kicsiny érték, kb. $mg(\Delta x) = 10^{-32}$ J kellene legyen. Ilyen alacsony energiájú állapotban csak akkor maradhatna meg egy részecske, ha az őt véletlenszerűen „lökdöső", T hőmérsékletű környezettől kapott átlagos kT energia nem nagyobb, mint az elektron energiája (pontosabban az energiaszintek távolsága). Mivel a k Boltzmann-állandó 10^{-23} J/K nagyságrendű, a szükséges „nyugodt" környezet 10^{-9} K hőmérsékletű, vagyis irreálisan hideg kellene legyen!

3. 1997. tavaszán emlékezett meg a világ az elektron felfedezésének 100 éves évfordulójáról (lásd még az **FF. 3075.** kitűzött feladatot lapunk 318. oldalán). Ez a – bizonyos értelemben elemi, belső szerkezet nélküli – részecske az elmúlt száz év alatt nagyon sok meglepetést okozott a fizikusoknak, s még ma sem állíthatjuk, hogy valamennyi titkát megismertük.