Jelöljük az ék (vízszintes) gyorsulását A-val, a golyónak az ékhez viszonyított (felfelé irányított) gyorsulását pedig a-val (lásd az *ábrát*). A golyó gyorsulása ekkor a talajhoz (inerciarendszerhez) viszonyítva:

$$a_x = A - a\cos\alpha, \quad \text{illetve} \quad a_y = a\sin\alpha, \tag{1}$$

szöggyorsulása pedig (a csúszásmentes gördülés feltétele miatt) $\beta = a/R$.

Ha az ék és a golyó között ható nyomóerőt K-val, a súrlódási erőt pedig S-sel jelöljük (az ábrán látható irányítással), akkor a az ék illetve a golyó mozgásegyenletei:

$$F - S\cos\alpha - K\sin\alpha = MA, (2) K\cos\alpha - S\sin\alpha - mg = ma_y, (3) K\sin\alpha + S\cos\alpha = ma_x, (4)$$

a golyó forgómozgásának egyenlete pedig

(5) $$SR = \frac{2}{5}mR^2\beta.$$

(Feltételeztük, hogy a gömb homogén tömegeloszlású, s így a tehetetlenségi nyomatéka $2mR^2/5$.)

Felhasználhatjuk még, hogy a golyó t idő alatt függőleges irányban egyenletesen gyorsulva h magasságba kerül, tehát

$$h = \frac{a_y t^2}{2}, \quad \text{ahonnan} \quad a_y = \frac{2h}{t^2} = 0{,}4\ \mathrm{m/s}^2,$$

s így a golyónak az ékhez viszonyított gyorsulására

$$a = \frac{a_y}{\sin\alpha} = 1{,}17\ \mathrm{m/s}^2$$

adódik. Innen (5) és a gördülés feltételének felhasználásával

$$S = \frac{2}{5}ma = 4{,}68\ \mathrm{N},$$

(3)-ból pedig

$$K = \frac{mg + S\sin\alpha + ma_y}{\cos\alpha} = 110{,}3\ \mathrm{N}.$$

A csúszásmentes gördülés feltétele: $|S| \le \mu N$, azaz

$$\mu \ge \frac{S}{N} = 0{,}042.$$

K és S ismeretében (4) alapján kiszámíthatjuk a_x-et, majd (1) felhasználásával az ék gyorsulását

(6) $$A = \frac{7a + 5g\sin\alpha}{5\cos\alpha} = 5{,}31\ \mathrm{m/s}^2,$$

a (2) egyenletből pedig a keresett F erőt:

(7) $$F = (m+M)g\cdot \operatorname{tg}\alpha + \left(\frac{7}{5}M + \frac{2+5\sin^2\alpha}{5}m\right)\frac{2h}{t^2\sin\alpha\,\cos\alpha} = 148{,}4\ \mathrm{N}.$$

Deme Roland (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., IV. o.t.) és *Zawadowski Ádám* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A számítás során nem vettük figyelembe, hogy a golyó kezdetben nem érintheti az ék legalsó pontját (hiszen akkor a talajba nyomódna), hanem egy kicsivel (kb. 1 cm-rel) magasabbról indulhat csak.

Mátyási István (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., III. o.t.)

2. Az ékre ható erőt a munkatétel és a lendületváltozás törvénye segítségével is ki lehet számítani. Jelöljük az ék (egyenletes) gyorsulását most is A-val, a golyónak az ékhez viszonyított gyorsulását pedig a-val. A mozgás t ideje alatt az ék $V = At$ sebességre gyorsul fel. A golyó vízszintes sebessége $v_x = At - at\cos\alpha$, függőleges sebessége $v_y = at\sin\alpha$, szögsebessége pedig $\omega = at/R$ lesz. Ugyanezen idő alatt az ék elmozdulása $At^2/2$, a golyó függőleges emelkedése h, így rendszerre ható külső erők munkája: $W = F\cdot At^2/2 - mgh$. A munkatétel szerint fennáll, hogy

$$F\cdot\frac{At^2}{2} - mgh = \frac{1}{2}M\cdot(At)^2 + \frac{1}{2}m\cdot(at\sin\alpha)^2 + \frac{1}{2}m\cdot(At - at\cos\alpha)^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}mR^2\cdot\left(\frac{a}{R}\right)^2.$$

Az F erő t idő alatt megváltoztatja a rendszer vízszintes irányú lendületét (impulzusát):

$$Ft = M\cdot At + m\cdot(At - at\,\cos\alpha).$$

A fenti két egyenletből F-t és A-t kiszámíthatjuk, és a (6), illetve (7) képleteknek megfelelő értékeket kapjuk.

Az itt alkalmazott megoldási módszernek az az előnye, hogy benne a rendszerre ható külső erők (F és mg) szerepelnek csak, a belső erők (S és K) nem. Ugyanez jelenti a módszer hátrányát is: mivel a rendszer egészére vonatkozó mennyiségeket (mozgási energiát, lendületet) vizsgáljuk, az egyes részek között ható belső erőkről semmit nem tudunk állítani, s emiatt például a súrlódási együttható minimális értékét sem tudjuk egyszerű eljárással meghatározni.

(G. P.)