I. megoldás. Az **FGy. 3024.** feladat megoldása szerint a súlylökő $v_0 = 13{,}33$ m/s kezdősebességgel, a vízszinteshez képest $\alpha_0 = 41{,}38^\circ$-os szögben $H = 2$ m magasságból lökte el a súlygolyót, így az 20 m távolságban ért földet. Számítsuk ki, milyen messzire perült volna az ugyanekkora nagyságú, de más α szögben indított golyó! A ferde hajítás képletei szerint

$$x = v_0 T \cos\alpha, \qquad -\frac{g}{2}T^2 + v_0 T \sin\alpha + H = 0, \tag{1}$$

ahonnan a repülés T idejét kiküszöbölve és az $u = \mathrm{tg}^2\,\alpha$ jelölést bevezetve az

$$(2) \qquad (1+u^2)x^2 - \frac{2v_0^2}{g}ux - \frac{2Hv_0^2}{g} = 0$$

összefüggést kapjuk. Ennek segítségével meghatározhatjuk x-et u (vagyis az ellökés szögének) függvényében, majd megkereshetjük (például differenciálszámítással vagy grafikusan) ennek az $x(u)$ függvénynek a maximumát.

Van azonban egyszerűbb, elemi eljárás is a maximumhely meghatározására. A (2) egyenletet felfoghatjuk úgy is, hogy adott x esetén ez az összefüggés adja meg, milyen u értékek (hajítási szögek) esetén kapjuk éppen a szóbanforgó x-et. Mivel (2) u-ra nézve másodfokú egyenlet, gyökeinek száma 2,1 vagy 0. Bizonyos x-eknek megfelelő távolságot (az adott kezdősebesség mellett) semmilyen dobási szöggel nem érhetünk el, más x-et két különböző irányú kezdősebességgel is megvalósíthatunk. A legnagyobb $x = x_{\max}$ távolságot az jellemzi, hogy hozzá csak egyetlen α szög, tehát egyetlen u megoldás tartozik (lásd az *ábrát*). Ilyenkor a (2) egyenlet (u-ra vonatkozó) diszkriminánsa nulla, vagyis:

$$\left(x_{\max}\frac{v_0^2}{g}\right)^2 = x_{\max}^2\left(x_{\max}^2 - \frac{2Hv_0^2}{H}\right),$$

azaz

$$(3) \qquad x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{1+\frac{2gH}{v_0^2}} = 20{,}000\,25 \text{ m} \approx 20{,}0 \text{ m}.$$

A súlylökő tehát elvben mindössze $\frac{1}{4}$ milliméterrel tudna javítani az eredményén a szög alkalmas megválasztásával, ez azonban jócskán a

mérhetőség határa alatt van. Az $x_{\max}$ távolsághoz tartozó optimális szögre (1) és (2) alapján:

$$\operatorname{tg}\alpha_{\text{opt}} = u_{\text{opt}} = \frac{v_0^2}{2gx_{\max}},$$

ahonnan $\alpha_{\text{opt}} = 42{,}1^\circ$, majdnem pontosan ugyanannyi, mint amennyi a 3024. feladatban szereplő adat. Mivel egy fizika feladatban a kiindulási adatok (paraméterek) pontosságánál sokkal precízebb számolásnak nincs sok értelme, a feltett kérdésre az a válasz, hogy a súlylökő az eldobási szög jobb megválasztásával sem tudta volna messzebbre lökni a súlyt, mert azt (az adott pontossággal vizsgálva a folyamatot) éppen a lehető legjobban választotta meg.

Varga Áron (Trefort Á. Kéttannyelvű SzkI. és Gimn., IV. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Adjuk meg a súlylökés távolságát a repülési idő függvényében! Ezt úgy tehetjük meg, hogy az (1) egyenletekből kiküszöböljük az ellökés α szögét:

$$\cos\alpha = \frac{x}{v_0T,} \qquad \sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{x}{v_0T}\right)^2},$$

ahonnan a függőleges irányú elmozdulás egyenlete:

$$-\frac{g}{2}T^2 + v_0T\sqrt{1-\left(\frac{x}{v_0T}\right)^2} + H = 0.$$

Ebből átrendezés és négyzetre emelés után

$$x^2 = -\frac{g^2}{4}T^4 + \left(v_0^2+gH\right)T^2 - H^2 == -\left(\frac{gT^2}{2} - \frac{v_0^2+gH}{g}\right)^2 + \left(\frac{v_0^2}{g}+H\right)^2 - H^2 \le \frac{v_0^4}{g^2} + \frac{2Hv_0^2}{g},$$

azaz

$$x \le x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{1+\frac{2gH}{v_0^2}} \approx 20{,}0 \text{ m}.$$

Várkonyi Péter (Fővárosi Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o.t.)