Jelöljük a Föld tömegét M-mel, sugarát R-rel, forgási szögsebességét Ω-val, a Hold hasonló adatait pedig m-mel, r-rel és ω-val. A Hold–Föld távolság legyen L, a tömegközéppont ekkor a Föld középpontjától $\frac{m}{m+M}L$, a Hold középpontjától pedig $\frac{M}{m+M}L$ távolságban található. A Hold és a Föld egyaránt kering a közös tömegközéppont körül, szögsebességük megegyezik a Hold tengelyforgási szögsebességével, ω-val. (Az egyszerűség kedvéért nem vesszük számításba a földi Egyenlítő síkjának, a Hold keringési síkjának és a Hold egyenlítőjének hajlásszögét, hanem úgy tekintjük, mintha mindezek a mozgások ugyanabban a síkban történnének. Ténylegesen a Hold egyenlítője 6°-os szöget zár be a holdpálya síkjával, a Föld Egyenlítője pedig $23,5^\circ$-os szögben hajlik az ekliptikához képest, amivel a holdpálya síkja 5°-os szöget zár be. Ugyancsak figyelmen kívül hagyjuk a Föld–Hold rendszer mozgását a Nap körül.)

A Hold és a Föld az említett közelítésekkel zárt rendszernek tekinthető, melyre érvényes a perdületmegmaradás törvénye. A Föld tehetetlenségi nyomatékát $\Theta^{\text{Föld}}$-del, a Holdét pedig Θ^{Hold}-dal jelölve (mindkettőt a középpontjukra, vagyis a saját tömegközéppontjukra vonatkoztatjuk), a rendszer teljes impulzusnyomatéka (perdülete):

$$N_{\text{összes}} = N_{\text{saját}}^{\text{Föld}} + N_{\text{pálya}}^{\text{Föld}} + N_{\text{saját}}^{\text{Hold}} + N_{\text{pálya}}^{\text{Hold}} =$$
$$= \Theta^{\text{Föld}}\Omega + M\left(\frac{m}{m+M}L\right)^2\omega + \Theta^{\text{Hold}}\omega + m\left(\frac{M}{m+M}L\right)^2\omega = \text{állandó}.$$

Megmutatjuk, hogy a Föld saját perdülete sokkal nagyobb, mint a pályamenti mozgásból adódó perülete, a Holdnál pedig fordított a helyzet: a saját perdülete elhanyagolhatóan kicsi a pályamenti mozgásból adódó impulzusnyomaték mellett. Felhasználjuk továbbá, hogy $M/m \approx 81$, $\Omega/\omega \approx 30$, $L/R \approx 60$ és $L/r \approx 110$, valamint a Hold és a Föld tehetetlenségi nyomatékának *nagyságrendi* becsléseként $\Theta^{\text{Hold}} \approx 0,4mr^2$, $\Theta^{\text{Föld}} \approx 0,4MR^2$. Ezekkel az adatokkal

$$\frac{N_{\text{saját}}^{\text{Föld}}}{N_{\text{pálya}}^{\text{Föld}}} \approx \frac{0,4MR^2\Omega}{M(mL/M)^2\omega} = 0{,}4\left(\frac{M}{m}\right)^2 \cdot \left(\frac{R}{L}\right)^2 \cdot \frac{\Omega}{\omega} \approx 21 \gg 1.$$

Hasonlóan adódik, hogy

$$\frac{N_{\text{saját}}^{\text{Hold}}}{N_{\text{pálya}}^{\text{Hold}}} \approx \frac{0,4mr^2\omega}{mL^2\omega} = 0{,}4 \cdot \left(\frac{r}{L}\right)^2 \approx 3 \cdot 10^{-5} \ll 1.$$

A fenti közelítésben a perdületmegmaradás törvénye így fogalmazható meg:

(1) $$N_{\text{összes}} = N_{\text{saját}}^{\text{Föld}} + N_{\text{pálya}}^{\text{Hold}} = \Theta^{\text{Föld}}\Omega + mL^2\omega = \text{állandó}.$$

A Hold (és a Föld) tömegközéppont körüli mozgásának pályáját jó közelítéssel körnek tekinthetjük, melyre a Newton-féle mozgásegyenletből az

(2) $$f(M+m) = L^3\omega^2$$

feltétel adódik. Az (1) és (2) egyenletekből azt olvashatjuk ki, hogy az L, Ω és ω mennyiségek nem függetlenek egymástól, bármelyikük (kicsiny) megváltozása maga után vonja a másik két mennyiség változását is. Fejezzük ki pl. ΔL segítségével $\Delta\Omega$-t és $\Delta\omega$-t! Ha felírjuk (1)-t és (2)-t olymódon, hogy Ω helyébe $\Omega + \Delta\Omega$-t, ω helyébe $\omega + \Delta\omega$-t és L helyébe $L + \Delta L$-t helyettesítünk, akkor a kicsiny megváltozásokra (a kis mennyiségek szorzatait és magasabb hatványait elhanyagolva) a kövelkező összefüggéseket kapjuk:

(3) $$\Delta\Omega = -\frac{mL\omega}{2\Theta^{\text{Föld}}} \cdot \Delta L,$$

(4) $$\Delta\omega = -\frac{3\omega}{2L}\Delta L.$$

Ez a két egyenlet már elegendő arra, hogy összehasonlíthassuk a Föld és a Hold mozgási energiájának megváltozását. A csillagászati adatok ismeretében könnyen megkaphatjuk, hogy a Földnek nemcsak a perdülete, de a mozgási energiája is döntő mértékben a saját tengelye körüli forgásból adódik, a Hold–Föld rendszer közös tömegközéppontjához viszonyított transzlációs mozgás energiája elhanyagolható. A Holdnál éppen fordított a helyzet: mozgási energiájának döntő része a keringésből adódik, a forgásából származó energia nem számottevő. Eszerint

$$E_{\text{mozgási}}^{\text{Föld}} \approx \frac{1}{2}\Theta^{\text{Föld}}\Omega^2, \qquad E_{\text{mozgási}}^{\text{Hold}} \approx \frac{1}{2}mL^2\omega^2,$$

ahonnan a megváltozások aránya (3) és (4) felhasználásával

$$\frac{\Delta E^{\text{Föld}}}{\Delta E^{\text{Hold}}} = \frac{\Theta^{\text{Föld}}\Omega \cdot \Delta\Omega}{mL\omega^2 \cdot \Delta L + mL^2\omega \cdot \Delta\omega} = \frac{\Omega}{\omega} \approx \frac{1 \text{ hónap}}{1 \text{ nap}} \approx 30.$$

Az árapálykeltő erők tehát elsősorban a Föld mozgási energiáját csökkentik, sokkal nagyobb mértékben, mint a Holdét.

Borsos Júlia (Győr, Révai M. Gimn, III. o.t.), *Kacsuk Zsófia* (Budaörs, Illyés Gy. Gimn, IV. o.t.) és *Kocsis Bence* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn, III. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Vegyük észre, hogy a kérdéses arány kiszámításához nem kellett ismernünk a Föld tehetetlenségi nyomatékát. Nem volt szükségünk olyan feltevésre, miszerint a Föld homogén tömegeloszlású lenne és emiatt $\Theta^{\text{Föld}} = \frac{2}{5}MR^2$ teljesülne. Ténylegesen a Föld tömegeloszlása erősen inhomogén: a felszíni kőzetek átlagsűrűsége kb. 3 kg/dm^3, míg a Föld egészének átlagsűrűsége (amint az a Hold távolságából és a keringési idejéből kiszámítható) 5,5 kg/dm^3. Ezek a számok arra utalnak, hogy a Föld középső része sokkal sűrűbb kell legyen, mint a többi része, és emiatt a tehetetlenségi nyomatéka is kisebb, mint a homogén gömbé.

2. A Föld–Hold rendszer teljes mechanikai energiája, a mozgási energiák és a gravitációs helyzeti energia összege természetesen nem marad változatlan, hanem időben lassan csökken. A csökkenés ütemét nagyon nehéz lenne elméleti megfontolásokból kiindulva számszerűen megadni, hiszen azt a Föld és az óceánok belső súrlódása, viszkózitása határozza meg. Meg lehet mondani azonban a változások előjelét. A teljes mechanikai energia nyilván csökken. Ha ezt a változást kifejezzük L, Ω és ω megváltozásával, végül pedig (3) és (4) segítségével valamennyi változást ΔL-lel, akkor az összes mechanikai energia csökkenéséből az adódik, hogy Ω és ω csökken (tehát a forgási és keringési energia csökken), viszont L növekszik, tehát a Hold távolsága a Földtől (és ezzel együtt a gravitációs helyzeti energiája) növekszik.