A ρ_{test} sűrűségű, R sugarú (tehát $4R^3\pi\varrho/3$ tömegű) test mozgásegyenlete:

$$\frac{4R^3\pi}{3}\rho_{\text{test}}a = \frac{4R^3\pi}{3}(\rho_{\text{test}} - \rho_{\text{lev}})g - \frac{1}{2}k \cdot R^2\pi\rho_{\text{lev}} \cdot v^2.$$

Az egyenlet jobb oldalán szereplő erők rendre: a nehézségi erő, a felhajtóerő és a közegellenállási erő, melyet a test mögötti levegő örvénylő (turbulens) áramlása miatt a sebesség négyzetével arányosnak tekintettünk ($k \approx 0{,}45$ a gömb alaktényezője). A mozgásegyenlet tömörebb alakban:

$$a = (1 - C_1)g - C_2 \cdot \frac{v^2}{R},$$

ahol C_1 és C_2 a sűrűségektől és a test alakjától függő pozitív állandók.

Látható, hogy a különböző méretű golyók mozgásegyenletei között az a különbség, hogy a nagyobb sugarú golyó mozgásegyenletében kisebb a közegellenállási erőnek megfelelő tag. A nagyobb sugarú golyó gyorsulása tehát minden sebességnél nagyobb, mint a kisebb golyó gyorsulása, emiatt minden sebességértéket hamarabb fog élérni, mint a kisebb golyó és a kezdőpillanatot leszámítva bármelyik pillanatban a nagyobb golyónak nagyobb lesz a sebessége (lásd az *ábrát*). Ebből az is következik, hogy a nagyobb méretű golyónak bármilyen időtartamra vonatkoztatott átlagsebessége is meghaladja a kisebb golyó átlagsebességét, tehát ugyanakkora h magasságból leejtve a golyókat a nagyobb sugarú golyó esik le hamarabb.

Ha a t esési időből a közegellenállás és a felhajtóerő elhanyagolásával (vagyis a $h = gt^2/2$ képlet alkalmazásával) számítjuk ki a nehézségi gyorsulás *mért értékét,* akkor a nagyobb méretű golyó kisebb esési idejéből adódik nagyobb $g_{\text{mért}}$.

Kispál István (Dunaújváros, Széchenyi I. Gimn., III. o.t.) és *Koncz Imre* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. Írjuk fel a munkatételt a közegellenállási erő által fékezett golyó kicsiny Δx elmozdulására, miközben a sebessége $v(x)$-ről $v(x + \Delta x)$-re növekszik:

$$\frac{1}{2}\frac{4R^3\pi}{3}\rho_{\text{test}}\Delta(v^2) = \frac{4R^3\pi}{3}(\rho_{\text{test}} - \rho_{\text{lev}})g\Delta x - \frac{1}{2}kR^2\pi\rho_{\text{lev}} \cdot v^2 \cdot \Delta x,$$

ahol $\Delta(v^2) = [v(x + \Delta x)]^2 - [v(x)]^2$. Bevezetve a $v^2 = y(x)$ jelölést és a munkatétel egyenletét Δx-szel osztva az $y(x)$ függvényre az

$$a\frac{\Delta y}{\Delta x} = b - cy$$

differenciálegyenlet adódik (a, b és c pozitív állandók). Ez az egyenlet pontosan olyan alakú, mint egy adott feszültségű telepre kapcsolt kondenzátor feltöltődésének időbeli folyamatát leíró egyenlet, s amelynek megoldása megtalálható pl. a Négyjegyű függvénytáblázat 137. oldalán:

$$y(x) = \frac{b}{c}\left(1 - e^{xc/a}\right).$$

Ezen analógia alapján megkaphatjuk $v(x)$ konkrét alakját, s leolvashatjuk, hogy ugyanakkora út megtétele után a nagyobb sugarú golyó pillanatnyi sebessége biztosan nagyobb, mint a kisebb méretű golyóé.

Vukics András (Nagykanizsa, Batthyány L. Gimn., IV. o.t.)

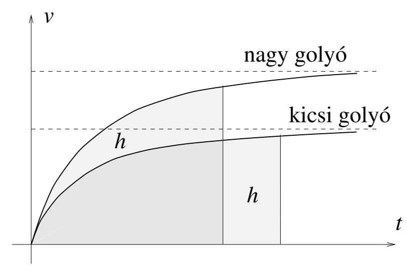
2. A közegellenállási erőtörvény ismert alakja csak az egyenletes sebességgel mozgó testek esetén alkalmazható. Ha a mozgó test sebessége változik (tehát a test gyorsul), akkor azt is figyelembe kell venni, hogy a mozgása során a környező levegő egy részét is fel kell gyorsítania. Ezt a hatást (amely akkor is fellép, ha a test pillanatnyi sebessége még elhanyagolhatóan kicsi, tehát a szokásos közegellenállási erő nulla) úgy vehetjük figyelembe, mintha a test „effektív tömege” megnőtt volna az általa kiszorított levegő tömegének K-szorosával (K egységnyi nagyságrendű, a test alakjától is függő dimenziótlan szám). A mozgásegyenlet módosított alakja ezek szerint

$$\frac{4R^3\pi}{3}(\rho_{\text{test}} + K\rho_{\text{lev}})a = \frac{4R^3\pi}{3}(\rho_{\text{test}} - \rho_{\text{lev}})g - \frac{1}{2}kR^2\pi\rho_{\text{lev}} \cdot v^2.$$

Mivel az effektív tömeg (a valódi tömeghez hasonlóan) a test térfogatával arányos, a fenti megoldásban leírt gondolatmenetet nem érinti; a mozgásegyenlet alakilag változatlan marad, csak a C_1 és C_2 állandók számértéke módosul.

G. P.

3. Sokan (helyesen) azt állították, hogy a nagyobb sugarú golyó végsebessége nagyobb lesz, mint a kisebb sugarú golyó állandósult sebessége. Ebből a tényből azonban még nem következik, hogy a nagyobb sugarú golyó hamarabb esik le, mint a kisebb sugarú golyó, hiszen a szokásos körülmények között elvégzett ejtési kísérletekben a testek sebessége még távol van az állandósult sebességtől. (Nem lenne célszerű ejtőernyősök földetérési idejének mérhető adataiból következtetni g számértékére!) A végsebességek összehasonlításával történő érvelés hiányos megoldásnak tekinthető csupán.


v
nagy golyó
kicsi golyó
h
h
t