

a) Vizsgáljuk a mozgást a pálcával együtt forgó vonatkoztatási rendszerben. Ebben a rendszerben a pálcára vízszintesen kifelé mutató centrifugális erő hat, melynek nagysága (lásd az FN. 2852. feladat megoldását a KöMaL 1995. évi 5. számában):

$$F = m\omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha,$$

támadáspontja pedig a pálca alsó harmadánál van. A pálca tömegközéppontjában hat az mg nehézségi erő (1. ábra).

A pálca ebben a rendszerben nyugalomban van, így a csuklóra (O) vonatkoztatott forgatónyomaték nulla:

$$F \cdot \frac{2}{3} \cdot l \cos \alpha - mg \frac{l}{2} \sin \alpha = 0.$$

F fenti alakját behelyettesítve, majd ω -t kifejezve:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l \cos \alpha}}.$$

b) Vizsgáljuk a pálca felső felét továbbra is a forgó koordináta-rendszerben. A csuklónál ható erőt függőleges és vízszintes komponensekre bonthatjuk fel. A vízszintes komponens nagysága F -vel, a függőlegesé mg -vel egyezik meg, mivel az egész pálca nyugalomban van, és így a rá ható erők eredője nulla (2. ábra). Az FN. 2852. feladat gondolatmenetét a pálca felső felére is alkalmazhatjuk. Így a felső félre ható centrifugális erő nagysága $F/4$, támadáspontja a felső fél alsó harmadolópontjában van. A felső fél középpontjában hat az $mg/2$ nehézségi erő. A pálca felső fele nyugalomban van, így a rá ható forgatónyomatékok összege nulla. Írjuk fel a forgatónyomaték egyenletet a pálca felezőpontjára (S):

$$-mg \frac{l}{2} \sin \alpha + F \frac{l}{2} \cos \alpha - \frac{F l}{4} \cos \alpha + \frac{mg l}{2} \frac{l}{4} \sin \alpha + M = 0.$$

Itt M az a forgatónyomaték, amivel a pálca alsó fele hat a felsőre. Az egyenletbe behelyettesítve F -nek és ω -nak az a) pontból ismert értékét

$$M = \frac{1}{32} mgl \sin \alpha$$

adódik. Ugyanekkora (de ellentétes irányú) forgatónyomatékkal hat a pálca felső fele az alsóra.

Méder Áron (Bp. Táncsics M. Gimn., II. o.t.) megoldása alapján

Megjegyzés. Az FN. 2852. feladat megoldásában találhatóhoz hasonló gondolatmenettel kiszámíthatjuk, hogy a pálca alsó felére ható centrifugális erő nagysága $m\omega^2 \frac{3l}{8} \sin \alpha$, támadáspontja pedig az alsó végtől számított $2/9$ részénél van. Ezek után az alsó fél pálcára is felírhatjuk a forgatónyomaték egyenletet, s ebből is megkaphatjuk a fenti eredményt.

