

Hanyagoljuk el a Föld forgását! A Földet átszelő alagútban a vonatot a  $G$  gravitációs erő és az alagút által kifejtett  $N$  tartóerő eredője, azaz a gravitációs erő alagút irányú  $F$  összetevője fog hatni (1. ábra). A gravitációs „tézerősség” egy homogén gömb belsejében, a középponttól  $x$  távolságra:

$$g(x) = -\frac{\gamma M}{R^3}x,$$

ahol  $\gamma$  a gravitációs állandó,  $M$  a Föld tömege,  $R$  pedig a sugara. (A negatív előjel arra utal, hogy az alagútban haladó vonatra a Föld középpontja felé mutató erő hat.)

Jelölje  $O$  a Föld középpontját,  $T$  a Föld középpontjából az alagútra állított merőleges talppontját,  $K$  Kolozsvárt,  $E$  pedig az Északi-sarkot. A jelentsé  $T$  és  $K$  pontok távolságát (ez megegyezik a  $TE$  távolsággal),  $y$  pedig a vonat és a  $T$  pont távolságát (2. ábra).

A tézerősség alagút irányú komponense:

$$g_a = -\frac{\gamma M}{R^3}x \frac{y}{x} = -\frac{\gamma M}{R^3}y.$$

Eszerint a vonatra a  $T$  ponttól mért távolsággal egyenesen arányos erő hat, ezért a vonat harmonikus rezgőmozgást fog végezni. A rezgőmozgás körfrekvenciája

$$\omega = \sqrt{-\frac{g_a}{y}} = \sqrt{\frac{\gamma M}{R^3}}.$$

A vonat az Északi-sarkra a fél periódusidő alatt fog eljutni:

$$t = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}}.$$

Az ismert adatokat behelyettesítve megkapjuk, hogy a vonat 2534 másodperc (kb. 42 perc) alatt jut el az Északi-sarkra. Az idő meghatározásánál nem használtuk fel, hogy Kolozsvár a Föld mely pontján fekszik. A Föld bármely két pontja között – a feladatban szereplő feltételek teljesülése esetén – ennyi ideig tartana az út.

A maximális sebességet a  $v_{\max} = A\omega$  képletből számíthatjuk ki.

$$v_{\max} = A\sqrt{\frac{\gamma M}{R^3}}.$$

Behelyettesítve az adatokat, és felhasználva, hogy Kolozsvár a  $47^\circ$  szélességi körön fekszik ( $A = R \cdot \sin \frac{90^\circ - 47^\circ}{2} \approx 2353$  km),  $v_{\max} = 2920$  m/s adódik.

Bérczi Gergely (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn., II. o.t.)

