A pálca mozgása három szakaszra osztható. Az I. szakaszban még mindkét szöghöz hozzáér a pálca, mozgása ekkor forgás nélküli egyenesvonalú, de nem egyenletesen gyorsuló mozgás. Ha a súrlódás nem túl erős, akkor a pálca felső vége valamekkora v_0 sebességgel eléri a B szöget és megkezdődik a mozgás II. szakasza. Ebben a szakaszban a pálcára a nehézségi erő és az A szög által kifejtett erő (nyomóerő és súrlódási erő) hat, melyek hatására a test tömegközéppontja valamilyen síkgörbe mentén gyorsulva mozog, s emellett a pálca még a tömegközéppontja körül változó szöggyorsulású forgómozgást is végez. Ez a szakasz addig tart, míg a pálca felső vége el nem éri az A szöget. Ezután, a III. szakaszban a pálcára már csak a nehézségi erő hat (ha a közegellenállást nem vesszük figyelembe), így a tömegközéppontja ferde hajításnak megfelelően kell mozogjon, a tömegközéppont körüli forgómozgás pedig egyenletes lesz. A III. szakaszbeli (állandó) szögsebesség nagysága megegyezik a II. szakaszbeli mozgás végső szögsebességével, a feladat tehát ennek meghatározása.

Míg az I. és a III. szakasz mozgását leíró egyenleteket elemi úton, felsőbb matematikai módszerek alkalmazása nélkül meg tudjuk oldani, addig a II. szakaszbeli mozgás egyenletei nagyon bonyolultak (csatolt, nemlineáris differenciálegyenlet-rendszert alkotnak), pontos megoldásuk még felsőbb matematikai eszközökkel sem kapható meg. Ennek ellenére, a numerikus adatok ismeretében egy elég természetes fizikai feltevéssel élhetünk, amelynek jogosságát bizonyos pontossággal igazolni is tudjuk, s amely feltevés mellett a megoldás is végigvihető.

Ez a feltevés a következő: Feltételezzük, hogy az I. szakasz végére a pálca viszonylag nagy sebességre gyorsult fel, s ezzel (a későbbiekben még tovább növekvő) sebességgel olyan rövid Δt idő alatt csúszik végig az A szögön, hogy közben nem tud számottevő mértékben elfordulni. A II. mozgásszakasz rövid ideje alatt a pálca sebességét és a vízszintessel bezárt szögét állandónak tekintjük, s ilyen feltételek mellett kiszámítjuk a szög által kifejtett N nyomóerőt. Ennek az erőnek a forgatónyomatéka Δt idő alatt valamekkora perdületet ad a pálcának, s ez a perdület a III. szakaszban már változatlan marad.

Kövessük most végig a fentieket számolással is! Az előző, **FF. 2932.** feladat megoldása szerint az I. szakaszban a pálcára ható súrlódási erők összege ($\alpha = 45^\circ$ esetén):

$$S(x) = \mu(N_A + N_B) = \frac{\mu m g}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{2x}{d}\right).$$

Látható, hogy $S(x)$ x-szel arányosan (lineárisan) változik, kezdetben $S(x=0) = \mu mg/\sqrt{2}$, a mozgásszakasz végén pedig (amikor $x = l/2 - d = 4d$) a súrlódási erők összege $S(4d) = 9\mu mg/\sqrt{2}$. Az átlagos súrlódási erő ezek szerint $S_{\text{átlag}} = 5\mu mg/\sqrt{2}$.

A munkatétel segítségével kiszámíthatjuk, hogy mekkora v_0 végsebességgel mozog a pálca az I. szakasz végén (és ami ezzel megegyező, a II. mozgásszakasz elején):

$$\frac{1}{2} m v_0^2 + S_{\text{átlag}} \cdot 4d = mg \cdot \frac{4d}{\sqrt{2}},$$

$$\text{ahonnan} v_0 = \sqrt{4\sqrt{2} \cdot gd(1 - 5\mu)} = \sqrt{4 \cdot 1,41 \cdot 9,81 \cdot 0,1(1 - 5 \cdot 0,1)} \approx 1,66\ \text{m/s}.$$

A II. mozgásszakaszban a pálca az *ábrán* látható erők hatására mozog. Kezdetben $\alpha = 45^\circ$, $v = v_0$ és $x = 4d = 0,4$ m. A pálca megpördülése szempontjából az a lényeges, hogy mekkora az N erő (átlagos) forgatónyomatékának és a mozgás Δt idejének szorzata. A pálca sebességének változását elhanyagolva a lecsúszás idejére

$$\Delta t \approx \frac{d}{v_0} = \frac{0,1\ \text{m}}{1,66\ \text{m/s}} = 0,06\ \text{s}$$

adódik. A nyomóerőt a kezdeti pillanatban a pálcára merőleges irányú mozgásegyenletből és a forgómozgás egyenletéből kaphatjuk meg. Az *ábra* jelöléseit használva

$$mg\cos 45^\circ - N = m a_2,$$
$$N \cdot 4d = \frac{1}{12} m l^2 \cdot \beta,$$

a kényszerfeltétel, hogy a pálcának a szöggel érintkező pontja nem gyorsul a pálcára merőlegesen:

$$a_2 - 4d \cdot \beta = 0.$$

Ezekből az egyenletekből

$$N = \frac{mg\cos 45^\circ}{1 + 12(4d)^2/l^2} \approx 0,24 mg.$$

(Megjegyezzük, hogy az I. szakasz végén, tehát amikor a pálca még éppen hozzáért a B szöghöz, az A szögnél ható nyomóerő $5mg\cos 45^\circ \approx 3,5mg$ volt. Amikor a pálca lecsúszik a B szögről, a másik szögnél ható erő ugrásszerűen megváltozik, értéke hirtelen jelentősen lecsökken.) Ha a fenti számolást megismételjük a II. mozgásszakasz végének megfelelő, vagyis az $x = 5d$ helyzetre, $N \approx 0,18mg$ adódik. A nyomóerő tehát átlagosan $N_{\text{átlag}} = 0,21mg$-nek vehető, s ennek a közelítésnek kb. 15% a pontossága.

Az $N_{\text{átlag}}$ erő forgatónyomatéka az átlagos $4,5d = 0,45$ m nagyságú erőkarral $N_{\text{átlag}} \cdot 4,5d$, így a forgómozgás alapegyenlete szerint az egyenletesnek feltételezett β szöggyorsulásra a következő egyenlet írható fel:

$$N_{\text{átlag}} \cdot 4,5d = \frac{1}{12} ml^2 \cdot \beta,$$

ahonnan a numerikus adatokkal $\beta \approx 11\ \mathrm{s}^{-2}$ adódik.

Ezzel a szöggyorsulással Δt idő alatt a pálca

$$\Delta\alpha = \frac{\beta}{2}(\Delta t)^2 \approx 0,02 \text{ radián} \approx 1^\circ$$

szöggel fordul el az $\alpha = 45^\circ$-os helyzethez képest. Ez a szögelfordulás valóban nem jelentős, ez a korábbi feltevésünk jogosságát igazolja.

A pálca a II. szakasz végén $\omega = \beta\Delta t \approx 0,7\ \mathrm{s}^{-1}$ szögsebességre, tehát másodpercenkénti $f = 0,1$-es fordulatszámra gyorsul fel, s ezt a fordulatszámot a továbbiakban meg is tartja. A számolás kb. 15 százalék pontossággal hihető el, ennyi az „elméleti érték relatív hibája”.

Tóth Gábor Zsolt (Budapest, Árpád Gimn., IV. o.t.) megoldása alapján