Tekintsük az atomokat – a klasszikus fizika fogalmainak megfelelően – kicsiny golyócskáknak, melyek egymástól (elvben) megkülönböztethetőek. Mindegyik atom egyforma (nevezetesen 50 %) valószínűséggel található az edény egyik (mondjuk a bal oldali) felében.

a) Annak valószínűsége, hogy a 60 atom közül a bal oldalon éppen 30 található, úgy kapható meg, hogy kiszámítjuk, hányféleképpen választható ki 60 atom közül 30 (amelyik a bal oldalra kerül), s ezt a számot elosztjuk az összes elképzelhető elrendeződés számával, vagyis 2^{60}-nal. Mivel egy n elemű halmazból

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 2\cdot 1}$$

féleképpen választhatunk ki k elemet (ismétlés nélküli kombináció), a keresett valószínűség

$$p_{30} = \frac{\binom{60}{30}}{2^{60}} = 10{,}26\,\%.$$

b) Ha 30 héliumatomból pontosan 15 kerül a bal oldali féltérbe, akkor a „kedvező esetek száma” $\binom{30}{15}\cdot\binom{30}{15}$ (hiszen mind a héliumatomokból, mind pedig a neonatomokból is ki kell választanunk a bal oldalra jutókat). Az összes, vagyis 2^{60} számú esetnek ez a szám 2,08 %-a. Ha „kedvező” (15 hélium + 15 neon a bal oldalon) eseteket nem az összes lehetséges elrendeződés számához, hanem csak az a) pontban kiszámított 30–30-asokhoz viszonyítjuk (ez az úgynevezett *feltételes valószínűség*), akkor

$$p_{\text{felt.}} = \frac{\binom{30}{15}^2}{\binom{60}{30}} = 20{,}37\,\%$$

eredmény adódik. Tehát az összes atomelrendeződésnek kb. tizedében oszlik el a „gáz” pontosan fele-fele arányban a két féltér között, de ezen eseteknek csak kb. egyötöde (az összes eset alig 1/50-ed része) olyan, hogy a kétféle összetevő külön-külön is éppen elfeleződik.

c) Annak valószínűsége, hogy 60 atomból éppen k található a bal oldali féltérben:

$$p_k = \frac{1}{2^{60}}\binom{60}{k}.$$

Ha ezeket a számokat rendre kiszámítjuk (nyilván teljesül a $p_k = p_{60-k}$ azonosság, ezért elegendő $k \le 30$-ig számolnunk), akkor (3 tizedesjegy pontosságra) a következő értékeket kapjuk:

$p_{30} = 0{,}102$; $p_{29} = 0{,}099$; $p_{28} = 0{,}090$; $p_{27} = 0{,}076$; $p_{26} = 0{,}061$; $p_{25} = 0{,}045$; $p_{24} = 0{,}031$;

Ha ábrázoljuk p_k-t k függvényében, az *ábrán* látható „haranggörbét” kapjuk. Annak valószínűsége, hogy $|30-k| \leq 10$, $\sum\limits_{k=20}^{40} p_k$ módon számítható ki, vagy még egyszerűbben, a többi (komplementer) lehetőség számbavételével. Mivel (ezrelék pontosságig) számbaveendő valószínűsége csak a $k=19$, 18, (illetve a szimmetrikus $k=41$, 42) eseteknek van, az eredetileg kérdezett valószínűség:

$$p = 1 - 2(0{,}002 + 0{,}001) \approx 99{,}4\,\%.$$

d) Az előző alkérdésnél kiszámított p_k-kból könnyen megkapjuk, hogy $p_{28}+p_{29}+p_{30}+p_{31}+p_{32}\approx 48{,}1\,\%$. Ezek szerint egy kicsit nagyobb a valószínűsége annak, hogy legalább 3-mal eltér az atomok száma a középértéktől, mint az ellenkezőjének.

e) A statisztikus fizikában az S entrópiát (egy arányossági tényezőtől eltekintve) a rendezetlenség mértékeként, az adott „makroállapotot” megvalósító „mikroállapotok” Y számának logaritmusaként értelmezzük: $S=k\ln Y$ (ahol k a Boltzmann-állandó).

A kezdetben szétválasztott hélium és neon (30 atom az egyik féltérben, 30 a másikban) egyetlen mikroállapotnak tekinthető, ehhez a térbeli elhelyezkedéshez tartozó entrópia tehát nulla. (Egyéb adataikban, pl. a sebességükben lehetnek rendezetlenek, az ehhez tartozó entrópiajárulék azonban az összekeveredés során nem változik, ezért nem vesszük figyelembe.) Az összekeveredett állapotban (nem feltétlenül a legvalószínűbb $30-30$-as elrendeződésben, hanem tetszőleges más eloszlásban) a mikroállapotok száma 2^{60}, az entrópia növekedése tehát

$$\Delta S=k\ln 2^{60}=60\cdot\ln 2\cdot k=5{,}74\cdot 10^{-23}\ \mathrm{J/K}.$$

Bárász Mihály (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A megoldás során mindvégig feltételeztük, hogy az atomok a hétköznapi életben előforduló dolgokhoz hasonlóan – legalább elvben – megkülönböztethetőek. (Még a tojások is, melyek olyan „egyformák, mint két tojás”, természetesen megkülönböztethetőek, ha mindegyikük apró részleteit is megfigyeljük.) Ha az atomok is ilyenek, tehát két atom felcserélésével adódó mikroállapot az eredetitől különböző, akkor az entrópia kiszámításánál független lehetőségként számításba veendő. Ebből a számolási eljárásból azonban az következik, hogy két – egymással megegyező hőmérsékletű és nyomású, ugyanolyan kémiai összetételű gázt tartalmazó – gáztartályt összekapcsolva a rendszer entrópiájának meg kellene nőnie. Ez azonban nem lehetséges, hiszen az entrópianövekedés az irreverzibilitás jele, s az egymással termodinamikai egyensúlyban levő rendszerekben irreverzibilis változások nem mennek végbe. Ez a híres *Gibbs-féle paradoxon*, melynek feloldása érdekében a fizikusoknak le kellett mondaniuk az atomok (akár csak elvben történő) megkülönböztethetőségéről! Bármennyire furcsának és érthetetlennek látszik ez a kijelentés, számos kísérlet egybehangzóan tanusítja, hogy az atomok és atomi részecskék (pl. az elektronok, protonok, fotonok) világában *ténylegesen* ez a helyzet. Ezek a részecskék tökéletesen megkülönböztethetetlek, de nem azért, mert a fizikusok ügyetlenségük, vagy technikai nehézségek miatt nem képesek ezen részecskék finom részleteinek megfigyelésére, hanem mert a mikrorészecskéknek nincsen még „mikróbb” szerkezete. Ez a Természet egyik alapvető törvénye, a kvantumvilág egyik furcsa, de kétségbevonhatatlan megnyilvánulása.

Felmerül a kérdés, hogy ha az atomok megkülönböztethetetlenek, akkor miért valószínűbb az az elrendeződés, amikor 60 atomból 30 van egy (gondolatban) kétfelé osztott tartály egyik felében és 30 a másikban, mint az az elrendezés, amikor mindegyik atom ugyanazon az oldalon található, vagy mondjuk 2 atom van az egyik oldalon és 58 a másikon. Naív módon számolva a lehetőségeket azt gondolhatnánk, hogy mindegyik helyzethez egy-egy mikroállapot tartozik (hiszen a tökéletesen egyforma atomok felcserélése nem növeli a lehetőségek számát). A tapasztalat szerint azonban nem ez a helyzet: a nagyjából egyenletesen gázeloszlás sokkal valószínűbb, mint az erősen aszimmetrikus.

Ezt a paradoxont az oldja meg, hogy figyelembe kell vegyük a gázatomok sokféle térbeli elhelyezkedésének lehetőségét. Ha 60 (egyforma, megkülönböztethetetlen) atom mindegyikének térbeli helyét (mindkét oldalon) N lehetőség közül választhatjuk ki ($N\gg 60$, elvben tetszőlegesen nagynak képzelhetjük), akkor a $0-60$-as elrendezést

$$Y_{0,60}=\binom{N}{0}\cdot\binom{N}{60}$$

féle módon, az $1-59$-est

$$Y_{1,59}=\binom{N}{1}\cdot\binom{N}{59}$$

különböző mikroállapottal valósíthatunk meg. Hogy viszonylik egymáshoz ez a két (egyaránt nagyon nagy) szám?

$$\frac{Y_{1,59}}{Y_{0,60}}=\frac{\binom{N}{1}\cdot\binom{N}{59}}{\binom{N}{0}\cdot\binom{N}{60}}=60\frac{N}{N-59}\approx 60.$$

Általában n atomot k és $n-k$ számban szétosztva

$$Y_{k,n-k}=\binom{N}{n}\cdot\binom{N}{n-k}$$

különböző mikroállapotban valósíthatunk meg, s ennek a számnak a legaszimmetrikusabb (legvalószínűtlenebb) eloszláshoz viszonyított aránya:

$$\frac{Y_{k,n-k}}{Y_{0,n}}=\frac{\binom{N}{k}\cdot\binom{N}{n-k}}{\binom{N}{0}\cdot\binom{N}{n}}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{N(N-1)\cdots(N-k+1)}{(N-n+1)(N-n+2)\cdots(N-n+k)}\approx\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}.$$

Ez az arány tehát ($N\gg n$ határesetben) megegyezik a klasszikus fizikai kép (megkülönböztethető részecskék egy-egy nagy dobozban) alapján korábban kapott eredménnyel.

G. P.