Ha a munkás a vízszintessel α szöget bezáró F nagyságú erőt fejt ki a ládára, és a talaj által kifejtett nyomóerőket, valamint súrlódási erőket az *1. ábrán* látható módon jelöljük, akkor a következő egyenleteket írhatjuk fel a láda megindulásának határhelyzetében:

$G_1 + F\sin\alpha = N_1$ (a munkás függőlegesen nem gyorsul),(1)$F\cos\alpha = S_1$ (a munkás vízszintesen nem gyorsul),(2)$S_1 \le \mu_1 N$

A (4)–(6) egyenletekből kifejezhetjük F-t α függvényében és megvizsgálhatjuk, hogy mekkora szögnél lesz $F(\alpha)$ minimális.

$$F(\alpha) = \frac{\mu_2 G_2}{\cos\alpha + \mu_2 \sin\alpha} \tag{7}$$

Ez a kifejezés akkor a legkisebb, ha a nevező a legnagyobb. A szélsőérték differenciálszámítással vagy geometriai megfontolással határozhatjuk meg. Rajzoljunk egy derékszögű háromszöget μ_2 és 1 hosszúságú befogókkal és döntsük meg a vízszinteshez képest α szöggel. A *2. ábráról* leolvasható, hogy az A pont és az e egyenes távolsága éppen (7) jobb oldalának nevezője, s ez a mennyiség legfeljebb $\sqrt{1+\mu_2^2}$ lehet. A szélsőértékhez tartozó szög: $\alpha = \varepsilon = \operatorname{arc\,tg} \mu_2$ éppen a μ_2 súrlódási együtthatóhoz tartozó „súrlódási határszög”. Eszerint F legalább

$$F_{\min} = \frac{\mu_2 G_2}{\sqrt{1+\mu_2^2}} \tag{8}$$

kell legyen, ami a feladat számértékeivel 546 N és $\alpha = 21,8^\circ$.

Eddig nem vizsgáltuk annak a feltételét, hogy a munkás lába nem csúszik meg. Az (1)–(2) egyenleteket (3) egyenlőtlenséggel összevetve az α szögre a

$$\operatorname{tg}\alpha \ge \frac{G_2\mu_2 - G_1\mu_1}{\mu_1\mu_2(G_1+G_2)} \tag{9}$$

megszorítást kapjuk. Ha $\mu_1 = 0,6$ vagy $0,7$, akkor (9) feltétel az optimális $\alpha = 21,8^\circ$ mellett teljesül. Ha viszont $\mu_1 = \mu_2 = 0,4$, akkor (9) szerint $\alpha > 42,3^\circ$, az ehhez tartozó legkisebb erő pedig (7) alapján: $F_{\min} = 583$ N.

Tóth Gábor Zsolt (Bp., Árpád Gimn., IV. o.t.)