I. megoldás. a) Jelöljük az abroncs középpontjának sebességét v_1-gyel abban a helyzetben, amikor a nehezék legfelül van. Az abroncs szögsebessége ekkor $\omega_1 = v_1/R$, a nehezék sebessége pedig $2v_1$ (*1. ábra*). Az energiamegmaradás tétel szerint

(1) $$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v_1}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}m(2v_1)^2 + mg(2R) = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\left(mR^2\right)\left(\frac{v_0}{R}\right)^2,$$

ahonnan

(2) $$v_1 = \sqrt{\frac{v_0^2 - 2gR}{3}}.$$

(Felhasználtuk, hogy az abroncs tehetetlenségi nyomatéka a középpontján átmenő tengelyre vonatkoztatva $\Theta = mR^2$, továbbá hogy egy merev test mozgási energiája a tömegközéppont mozgásának megfelelő $mv^2/2$ és a tömegközéppont körüli forgásnak megfelelő $\Theta\,\omega^2/2$ energiák összege.)

A nehezék felső helyzetében a *2. ábrán* látható erők hatnak az abroncsra, illetve a nehezékre. A nehezék függőleges irányú gyorsulása az ω_1 szögsebességű forgásból származik: $a = R\omega_1^2 = v_1^2/R$. A mozgásegyenletek:

$$mg - K - F = 0, (3) mg + F = m\frac{v_1^2}{R}, (4)$$

amelyekből a talaj által kifejtett nyomóerő

(5) $$K = 2mg - \frac{mv_1^2}{R}.$$

Az abroncs akkor nem emelkedik fel, ha $K \geq 0$, vagyis $v_1^2 < 2gR$. Ezt a feltételt (2)-vel összevetve a kezdősebességre a

(6) $$v_0 \leq \sqrt{8gR} \approx 4\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

megszorítás adódik.

b) Amikor a nehezék az abroncs középpontjával azonos magasságba kerül (például a *3. ábrán* látható helyzetben), az energiatétel szerint az abroncs v_2 sebességére

(7) $$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\left(mR^2\right)\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}\left(mR^2\right)\left(\frac{v_2}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\sqrt{2}v_2\right)^2 + mgR,$$

azaz

(8) $$v_2 = \sqrt{\frac{v_0^2 - Rg}{2}}$$

adódik. (A nehezék teljes sebessége az abroncs vízszintes haladásából adódó v_2 és a forgásból származó függőleges irányú, $\omega_2 R = v_2$ nagyságú sebességek vektori összege.)

A mozgásegyenletek a *4. ábrán* látható jelölésekkel a nehezékre

$$F = m\left(a + \frac{v_2^2}{R}\right), (9) S_2 - mg = m(R\beta), (10) \text{az abroncsra pedig} S_1 - F = ma, (11) mg + S_2 - K = 0, (12) S_1R + S_2R = -\left(mR^2\right)\cdot$$

ahol a csúszásmentes gördülés miatt az abroncs β szöggyorsulása és tömegközéppontjának a gyorsulása között fennáll: $\beta = a/R$.

A (8)–(13) egyenletrendszer megoldásából a keresett nyomóerő

(14) $$K = \frac{1}{8}mg\left(15 - \frac{v_0^2}{Rg}\right).$$

Ha a kezdősebesség éppen a (6) egyenlőtlenség határhelyzetének megfelelő, akkor

(15) $$K = \frac{7}{8}mg \approx 14N.$$

ugyanezt kapjuk a nehezék másik helyzetében, a leszálló ágban is.

Bárász Mihály (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o.t.)

II. megoldás. b) Az abroncsot és a hozzá rögzített nehezéket tekintsük egyetlen merev testnek, amelynek tömege $2m$, a tömegközéppontja pedig az *5. ábrán* látható T pont. A T pontra vonatkoztatva a rendszer tehetetlenségi nyomatéka (a Steiner-tétel felhasználásával)

(16) $$\Theta_T = \Theta_T^{(\text{abroncs})} + \Theta_T^{(\text{nehezék})} = mR^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 + m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}mR^2.$$

Ha a kezdeti v_0 sebességnek és $\omega_0 = v_0/R$ szögsebességnek megfelelő energiát összehasonlítjuk a *6. ábrán* látható helyzet v_2 sebességű és $\omega_2 = v_2/R$ szögsebességű mozgásával, az energia megmaradásának tétele szerint

$$\frac{2m}{2}\left[\frac{v_0}{2}\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2}mR^2\right]\frac{v_0^2}{R} = \frac{2m}{2}\left[R^2 + \frac{R^2}{4}\right]\left[\frac{v_2}{R}\right]^2 + \frac{1}{2}\frac{3mR^2}{2}\left[\frac{v_2}{R}\right]^2 + mgR, \tag{17}$$

azaz

$$v_2 = \sqrt{\frac{v_0^2 - Rg}{2}} = \omega_2 R. \tag{18}$$

(Mindkét helyzetben a mozgási energiát a tömegközéppont haladó mozgásából és a tömegközéppont körüli forgásból számoltuk. A szögsebességet a talajjal való érintkezési pont körüli forgásból határozhatjuk meg, de ugyanekkora szögsebességgel forog a rendszer a tömegközéppontja körül is.)

A rendszer mozgását a *7. ábrán* látható erőkkel és gyorsulásokkal az alábbi egyenlet írják le:

$$K - 2mg = 2m \cdot a_2, (19) S = 2m \cdot a_1. (20)$$

A forgómozgás alapegyenlete a tömegközéppontra

$$-\left(S \cdot R + K \cdot \frac{R}{2}\right) = \frac{3}{2}mR^2 \cdot \beta. \tag{21}$$

Az a_1, a_2, β, ω_2 mennyiségek nem függetlenek, közöttük az teremt kapcsolatot, hogy tudjuk: az abroncs középpontja függőlegesen nem gyorsul, a vízszintes gyorsulása pedig $R\beta$.

$$a_2 - \frac{R}{2}\beta = 0, \qquad \text{illetve} \qquad a_1 - \frac{R}{2}\omega_2^2 = R\beta. \tag{22}$$

A (18)–(22) egyenletekből a nyomóerőre

$$K = \frac{15}{8}mg - \frac{mv_0^2}{8R}$$

adódik, összhangban az I. megoldás (14) képletével. Hasonlóan számíthatók ki az a) kérdésben szereplő helyzetben is az abroncsra ható erők.

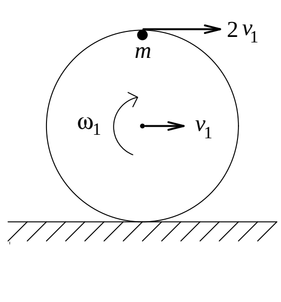
Lovász Mónika (Pécs, Nagy L. Gimn., III. o.t.)

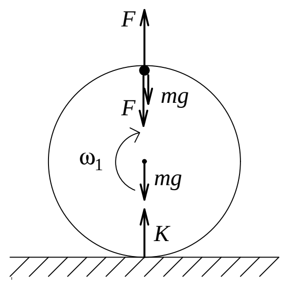
Megjegyzések. 1. Felmerül a kérdés, hogy ha a kezdősebességet éppen a (6) feltételnek megfelelő határesetnek választjuk ($v_0 = \sqrt{8Rg}$, vagyis az abroncs a nehezék legfelső helyzetében *nem* emelkedik fel), akkor biztosak lehetünk-e benne, hogy a K nyomóerő a mozgás során mindvégig pozitív. Elvben elképzelhető lenne, hogy az abroncs a mozgás korábbi szakaszában valamikor felpattan. *Gubás Lóránt László* (Miskolc, Földes F. Gimn., III. o.t.) kiszámította, hogy amikor az abroncs középpontját és a nehezéket összekötő egyenes α szöget zár be a függőlegessel, a nyomóerő

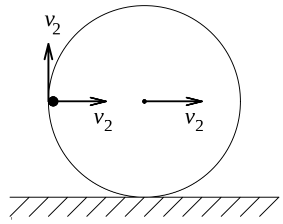
$$K(\alpha) = mg\left(\frac{27}{2(2-\cos\alpha)^2} - \cos\alpha - \frac{5}{2}\right).$$

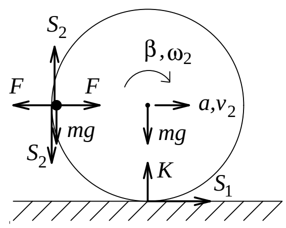
A nehezék felső helyzeténél $K(180°) = 0$, a b) kérdésbeli esetekben $K(90°) = K(270°) = 7/8mg$, míg a kezdeti állapotban $K(\alpha = 0) = 10mg$. A $K(\alpha)$ függvény grafikus vizsgálata (*8. ábra*), illetve függvényanalízis (szélsőérték keresése deriválással) azt igazolja, hogy (6) teljesülése esetén $K(\alpha)$ sehol nem válik negatívvá.

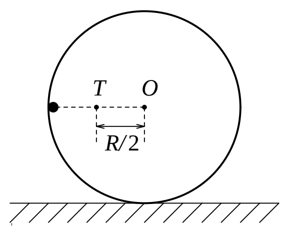
2. A nehezék pályája ciklois. Az a) kérdésre sokan úgy próbáltak válaszolni, hogy a nehezék gyorsulását a legfelső helyzetben a $2v_1$ sebességű, R^* görbületi sugarú körmozgásból számolták. Úgy érveltek, hogy az abroncs pillanatnyi forgáscentruma a talajjal érintkező pont, tehát $R^* = 2R$, $a_{\text{nehezék}} = \dfrac{4v_1^2}{2R}$, s az $mg + mg = m \cdot a_{\text{nehezék}}$ egyenletből $v_1^2 = Rg$, azaz $v_0^2 = 5Rg$. Ez azonban hibás! A ciklois görbületi sugara a kérdéses pontban $R^* = 4R$, a centripetális gyorsulás pedig $(2v_1)^2/(4R) = v_1^2/R$. Jól látható, a fenti érvelés tarthatatlansága, ha azt az abroncs középpontjára alkalmazzuk. Ez a pont is a talajjal érintkező pont körül fordul el, a pályájának (ami egyenes) mégsem R a görbületi sugara, hanem végtelen!

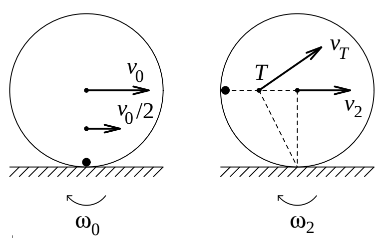


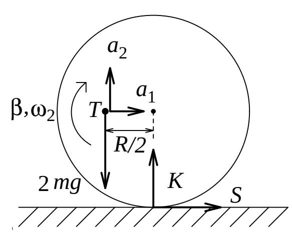

F
mg
F
ω1
mg
K

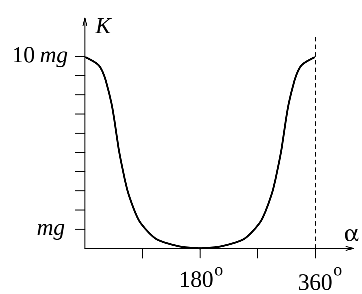

v2
v2
v2


S2
β, ω2
F
F
a,v2
mg
mg
S2
K
S1


T
O
R/2


v0
v0/2
ω0
vT
T
v2
ω2


a2
a1
β,ω2
T
R/2
2 mg
K
S


K
10 mg
mg
α
180°
360°