

A rúd tömegközéppontjának vízszintes gyorsulását a súrlódási erő okozza. A tömegközéppont kezdetben „előre” (a dőlés irányába) gyorsul, tehát a súrlódási erőnek is ilyen irányúnak kell lennie. Ha az asztal és a rúd alja közötti tapadási súrlódási együttható nem elég nagy, a rúd alja a dőlés kezdeti szakaszában megcsúszik, méghozzá *hátrafelé*, a dőlés irányával ellentétesen. Amennyiben ez mégsem következne be, akkor a rúd tömegközéppontja előbb-utóbb lassulni kezd (hiszen a teljes eldőlés pillanatában már nulla lenne a vízszintes irányú sebessége). A lassulást a dőlés irányával ellentétes súrlódási erő okozza, ha tehát a rúd alja a mozgás ezen szakaszában csúszik meg, akkor ezt *előrefelé* teszi.

A fentebb leírt kvalitatív kép részletes számítással is nyomon követhető. Az m tömegű, l hosszúságú, a tömegközéppontjára vonatkoztatva $\Theta = \frac{1}{12}ml^2$ tehetetlenségi nyomatékú rúdra α dőlési szögnél az *1. ábrán* látható erők hatnak. Ezek hatására a rúd tömegközéppontja a_t érintőleges (tangenciális) és a_r sugárirányú (radiális) gyorsulással, továbbá a tömegközéppontja körül ω szögsebességgel és β szöggyorsulással fog mozogni (*2. ábra*). Mindezek a mennyiségek időben változnak, a mozgás tehát meglehetősen bonyolult.

Felírva a tömegközéppontra vonatkozó (sugár- és érintő irányú) mozgásegyenleteket, a forgómozgás dinamikai egyenletét, az energiamegmaradás tételét, valamint azokat a kényszerfeltételeket, melyek azt fejezik ki, hogy a rúd legalsó pontja a megcsúszás pillanatáig semerre nem gyorsul, kiszámíthatjuk az N nyomóerőt és az S súrlódási erőt az α szög függvényében:

$$(1) \quad N = \frac{1}{4}mg(3 \cos \alpha - 1)^2,$$

$$(2) \quad S = \frac{3}{4}mg \sin \alpha(3 \cos \alpha - 2).$$

Látható, hogy az asztal és a rúd közötti nyomóerő kezdetben pozitív, de a dőlés során egyre csökken, s $\alpha_3 = \arccos \frac{1}{3} = 70,5^\circ$ -nál nullává válik. A pálca tehát legkésőbb ennél a szögnél (ténylegesen már ennél hamarabb) megcsúszik.

A megcsúszás akkor következik be, amikor az

$$f(\alpha) = \left| \frac{S}{N} \right| = \left| \frac{3 \sin \alpha(3 \cos \alpha - 2)}{(3 \cos \alpha - 1)^2} \right|$$

hányados eléri (vagy meghaladja) a μ tapadási súrlódási együttható tényleges értékét. Ábrázolva az $f(\alpha)$ függvényt (*3. ábra*) leolvashatjuk (vagy differenciálszámítás segítségével ki is számíthatjuk), hogy $f(\alpha)$ -nak $\alpha_1 = \arccos \frac{9}{11} \approx 35,1^\circ$ -nál lokális maximuma van és $f(\alpha_1) = \mu_0 \approx 0,37$. Amennyiben $\mu < \mu_0$, a rúd alja „hátrafelé” csúszik meg az $f(\alpha) = \mu$ egyenlet gyökének megfelelő ($\alpha < \alpha_1$) szögnél. Ha viszont $\mu > \mu_0$, a rúd „előrefelé” csúszik meg.

Hátra van még annak megfontolása, hogy felemelkedhet-e a rúd alsó vége az asztról. A megcsúszás pillanatáig biztosan nem, hiszen láttuk, hogy az addig érvényes mozgásegyenletek szerint $N \geq 0$. Az energiaviszonyok tanulmányozásával (a helyzeti, mozgási és forgási energia összehasonlításával, ezek között fennálló egyenlőség felírásával) be lehet látni, hogy a rúd alsó vége még akkor sem emelkedhet fel az asztról, amikor már megcsúszott azon.

Németh Tibor (Győr, Révai M. Gimn., IV. o.t.) és *Tóth Gábor Zsolt* (Budapest, Árpád Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

