

Egy test akkor csúszik egyenletesen lefele egy lejtőn, ha az mg súly lejtőirányú komponense és a súrlódási erő kiegyenlítik egymást:

$$mg \sin \alpha = \mu mg \cos \alpha, \text{ vagyis } \mu = \operatorname{tg} \alpha. (1)$$

Ha a testet vízszintesen indítjuk el, elegendően hosszú idő múlva a lejtővel párhuzamosan lefele egyenletesen fog mozogni. Az *ábrán* kiszemeltük a pálya egy pontját, amelyben a test \mathbf{v} sebessége β szöget zár be a lejtő aljával párhuzamos x tengellyel. Írjuk fel a test gyorsulásának érintő irányú (tehát \mathbf{v} -vel párhuzamos) komponensét, a_ϵ -t, és az y irányú komponensét, a_y -t:

$$\begin{aligned} a_\epsilon &= g \sin \alpha \sin \beta - \mu g \cos \alpha, \\ a_y &= g \sin \alpha - \mu g \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

(1) felhasználásával

$$\begin{aligned} a_\epsilon &= g \sin \alpha (\sin \beta - 1), \\ a_y &= g \sin \alpha (1 - \sin \beta). \end{aligned}$$

Látjuk, hogy $a_\epsilon + a_y = 0$, vagyis

$$(2) \quad v + v_y = \text{állandó}.$$

Kezdetben $v = v_0$ és $v_y = 0$, elegendően hosszú idő múlva pedig $v = v_y$. Tehát (2) alapján

$$v_0 + 0 = v + v,$$

ahonnan a keresett végsebesség: $v = v_0/2$.

Több dolgozat alapján

Megjegyzés. A lejtőn való mozgás x és y irányú komponenseit jellemző differenciálegyenleteket közelítően (kis lépések módszerével) számítógéppel is meg lehet oldani. $v_0 = 2 \text{ m/s}$, $\alpha = 30^\circ$, $\mu = \operatorname{tg} 30^\circ$ és $g = 10 \text{ m/s}^2$ adatokat választva, és a változásokat $\Delta t = 0,1 \text{ s}$ időközönként kinyomtatva, de a számítást sokkal kisebb lépésként számolva az alábbi eredményeket kapjuk:

t (s)	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3
x (m)	0,00	0,17	0,30	0,39	0,45	0,48	0,51	0,52	0,52	0,53	0,53	0,53	0,53	0,53
y (m)	0,00	0,02	0,08	0,16	0,26	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95	1,05	1,15
v_x (m/s)	2,00	1,50	1,06	0,69	0,44	0,27	0,16	0,10	0,06	0,04	0,02	0,01	0,01	0,00
v_y (m/s)	0,00	0,06	0,69	0,88	0,95	0,98	0,99	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00

Érdekes, hogy a $v_0/2$ végsebesség milyen rövid idő alatt valósul meg.

Kovács Krisztián (BME, I. éves hallgató)

