I. megoldás. Jelöljük a pálcák tömegét m_1-gyel és m_2-vel! Mivel a tömegeloszlásuk egyenletes, a tömegük arányos a hosszukkal, vagyis a hosszegységre eső tömegük megegyezik:

$$\frac{m_1}{l_1}=\frac{m_2}{l_2}=\lambda. \tag{1}$$

A pálcák kétféleképpen zárhatnak be 45°-os szöget a függőlegessel: ha párhuzamosak egymással, vagy ha merőlegesek egymásra. Hasonlóan az **FF. 2840.** feladat megoldásához (lásd lapunk 304. oldalán), ennél a feladatnál is belátható, hogy a megadott feltételeknek csak a merőlegesen elhelyezkedő pálcák felelnek meg. Foglalkozzunk tehát ezzel az esettel!

Írjuk le a pálcák „mozgását" az ω szögsebességgel forgó koordináta-rendszerből nézve! Ebben a rendszerben a pálcák nem mozognak, egyensúlyban vannak, tehát a rájuk ható erők eredője, illetve az erők forgatónyomatékának összege – külön-külön mindkét pálcára – nulla kell legyen. Az erők és a forgatónyomatékok számításánál figyelembe kell vennünk, hogy a forgó koordináta-rendszer *nem inerciarendszer*, tehát benne a szokásos *valódi* (más testekkel való kölcsönhatást kifejező) erőkön kívül ún. *tehetetlenségi erők* is fellépnek. A koordináta-rendszerhez képest álló testeknél csak egyfajta tehetetlenségi erőt kell számításba vennünk: a centrifugális erőt.

A továbbiak könnyebb áttekinthetősége érdekében gondoljuk végig a következő feladatot! Egy m_1 tömegű, l_1 hosszúságú, homogén tömegeloszlású pálcát, mely 45°-os szögben csuklósan csatlakozik a függőleges forgástengelyhez, az alsó végét pedig vízszintes fonál köti össze a tengellyel, ω szögsebességgel megforgatjuk (*1. ábra*). Mekkora erő feszíti a fonalat?

A forgó koordináta-rendszerből nézve a test az $m_1\mathbf{g}$ nehézségi erő, a $\mathbf{K}$ kötélerő, az O csuklópontnál ható (ismeretlen irányú és nagyságú) erő, valamint a pálca egyes részeire ható centrifugális erők eredőjének hatására egyensúlyban van. Célszerű az O pontra vonatkozó forgatónyomatéki egyenletet felírnunk, mert ebben nem kapnak szerepet az O-nál ható erők. (Az erők egyensúlyának feltételét ezek után már nem is érdemes felírni, hiszen ezekből az egyenletekből éppen az O-nál ható erőket tudjuk kiszámítani, s ezekre általában nincs szükségünk.) Vajon mekkora a pálca egyes darabkáira ható centrifugális erők eredője? A centrifugális erő helyről helyre változik (a forgástengelytől mért távolság változása miatt), de mivel ez a változás lineáris, az erő *nagyságának* szempontjából számolhatunk átlagos erővel, vagyis úgy, mintha a test egésze az S tömegközéppontban helyezkedne el:

$$F=\sum F_{\text{cf}}=m_1 r_{\text{átlag}}\omega^2=m_1\frac{l_1}{2\sqrt{2}}\omega^2.$$

Vigyázat: nem szabad azt gondolnunk, hogy ennek az erőnek a támadáspontját is az S pontba helyezhetjük, hiszen a test alsó felére ható centrifugális erők nyilván nagyobbak, mint a felső felére ható erők, s emiatt az S pontra vonatkoztatott eredő forgatónyomatékuk *nem nulla.*

Melyik az a Q pont a pálca mentén, amelyre vonatkoztatva a centrifugális erők eredő forgatónyomatéka nulla lenne? Könnyen beláthatjuk, hogy ez a pont a pálca alsó harmadoló pontja. Ha ugyanis egy derékszögű háromszög alakú, homogén anyageloszlású lemezt függőlegesen tartunk úgy, hogy az AB befogó vízszintes legyen (*2. ábra*), akkor a lemezre ható nehézségi erő is egy lineárisan növekvő erőrendszer eredője, hasonlóan az általunk vizsgált centrifugális erők rendszeréhez. A homogén háromszöglemez tömegközéppontja viszont a háromszög geometriai értelemben vett súlypontjába esik, s ez | mint közismert | harmadolja a súlyvonalakat, függőleges vetülete pedig harmadolja az AB szakaszt. Az *1. ábrán* látható pálca egyensúlyának feltétele tehát:

$$m_1 g\frac{l_1}{2\sqrt{2}}+K\frac{l_1}{\sqrt{2}}=m_1\frac{l_1}{2\sqrt{2}}\omega^2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{l_1}{\sqrt{2}},$$

ahonnan a keresett K kötélerő: $K=m_1 g\left(\dfrac{l_1\omega^2}{3\sqrt{2}g}-\dfrac{1}{2}\right).$

Térjünk most vissza az eredeti feladathoz! A felső, OP pálcára F_1 centrifugális erő hat, támadáspontja a pálca alsó harmadoló pontja. Az alsó pálca PQ szakaszára ugyancsak F_1 erő hat, a QR szakaszra pedig F_2, mindkettő a megfelelő szakasz külső (a forgástengelytől távolabb eső) harmadoló pontjánál (*3. ábra*). A pálcákra hat még a nehézségi erő, amely az egyes pálcák tömegközéppontjában vehető fel, továbbá a P és O csuklópontoknál ismeretlen irányú és ismeretlen nagyságú erők lépnek fel. Ez utóbbiakkal nem kell törődnünk, ha az alsó pálcának a P pontra vonatkozó forgatónyomatéki egyenletét, az egész rendszernek pedig az O pont körüli forgási egyensúly feltételét írjuk fel. Mivel

$$F_1=m_1\frac{l_1}{2\sqrt{2}}\omega^2, \tag{2}$$

és

$$F_2=m_2\frac{l_2-l_1}{l_2}\cdot\frac{l_2-l_1}{2\sqrt{2}}\omega^2, \tag{3}$$

a P pontra vonatkozó forgási egyensúly feltétele:

$$F_1\cdot\frac{l_1}{3\sqrt{2}}+m_2 g\frac{l_2}{2\sqrt{2}}=F_2\left(l_2-\frac{l_2-l_1}{3}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{4}$$

Hasonlóan kapjuk a két pálcából álló teljes rendszer O pontra vonatkoztatott forgási egyensúlyi egyenletét:

$$m_1 g\frac{l_1}{2\sqrt{2}}+m_2 g\left(l_2-\frac{l_1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}+F_2\left(l_1+l_2-\frac{l_2-l_1}{3}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}=F_1\left(\frac{2}{3}\frac{l_1}{\sqrt{2}}+\frac{4}{3}\frac{l_1}{\sqrt{2}}\right). \tag{5}$$

A (2) és (3) összefüggéseket (4)-be helyettesítve és (1)-t is felhasználva, algebrai átalakítások után

$$\sqrt{2}g=\omega^2\left(\frac{2}{3}l_2-l_1\right) \tag{6}$$

adódik. Ebből ω^2-t kifejezve és az (1)-(3) összefüggéseket is felhasználva (5)-be helyettesítés után a

$$7l_2^2-10l_1l_2-5l_1^2=0 \tag{7}$$

egyenletet kapjuk, amely (l_1^2-tel osztva) a pálcák hosszának keresett arányára egy másodfokú egyenlet. A számunkra érdekes pozitív gyök

$$\frac{l_2}{l_1}=\frac{5+\sqrt{60}}{7}\approx 1{,}82, \tag{8}$$

$$\text{s ebből (6) felhasználásával}\omega=\sqrt{\frac{3\sqrt{2}g}{2l_2-3l_1}}\approx\frac{8{,}05}{\sqrt{l_1}},$$

(amennyiben l_1-t méterben mérjük).

Bárász Mihály (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Oldjuk meg a feladatot a motorhoz rögzített inerciarendszerben! Ebben a koordináta-rendszerben nem kell számolnunk tehetetlenségi erőkkel, viszont a pálcák (merev testek) mozgásegyenletei bonyolultabbak, mint az egyensúlyi egyenletek. Gyakorlás kedvéért oldjuk meg az I. megoldásban szereplő egyszerűbb feladatot (lásd az *1. ábrát*) inerciarendszerből is. Az m_1 tömegű, l_1 hosszú, ω szögsebességgel forgó pálca gyorsulása vízszintes irányú, nagysága

$$a=\frac{l_1}{2\sqrt{2}}\omega^2.$$

A pálca mozgásegyenletei, a Newton-egyenletek (a *4. ábra* jelöléseit követve):

$$F_2+K=m_1\frac{l_1}{2\sqrt{2}}\omega^2, \tag{9}$$

$$F_1-m_1g=0. \tag{10}$$

A pálcára ható külső erőknek nem nulla a tömegközéppontra vonatkoztatott forgatónyomatéka, hanem (az óramutató járásával megegyező körüljárási irányt tekintve pozitívnak)

$$M=(F_1-F_2+K)\frac{l_1}{2\sqrt{2}} \tag{11}$$

nagyságú. Célszerű a forgatónyomatékot $\mathbf{M}$ vektornak tekinteni, melynek nagysága M, iránya pedig (az erők támadáspontjába mutató helyvektorok és az erők vektoriális szorzatának megfelelően) a papír síkjába befelé mutat. A merev testek forgómozgásának alapegyenlete:

$$\mathbf{M}=\frac{\Delta\mathbf{N}}{\Delta t}, \tag{12}$$

ahol $\mathbf{N}$ a merev test perdületének (más néven impulzusnyomatékának) vektora, s a fenti egyenlet jobb oldalán ezen vektor változási sebessége (egységnyi idő alatti megváltozása) szerepel.

Hogyan lehet kiszámítani egy test perdületét? Tudjuk, hogy az egész test ω szögsebességgel forog egy függőleges tengely körül, tehát a tömegközéppontja körüli forgását is egy (függőlegesen felfelé mutató) ω vektorral jellemezhető. A merev testek perdülete bizonyos esetekben (bizonyos irányú szögsebeségnél) olyan vektor, amely párhuzamos a szögsebesség vektorával, és a nagysága az

$$N=\Theta\,\omega \tag{13}$$

összefüggésből számítható ki. A Θ tehetetlenségi nyomaték a testre és a forgástengely irányára jellemző mennyiség. Egy m tömegű, l hosszú, r sugarú homogén hengernél például $\Theta_1=mr^2/2$ a szimmetriatengelyre vonatkoztatva, az erre merőleges tengelyre pedig (ha az átmegy a tömegközépponton): $\Theta_2=m(l^2+3r^2)/12$. Vékony, hosszú pálcáknál, amilyen a feladatunkban is szerepel, $r\ll l$ miatt $\Theta_1\ll\Theta_2\approx ml^2/12$.

Jelen esetben a szögsebesség vektora se nem párhuzamos a pálca szimmetriatengelyével, se nem merőleges arra, hanem mindkettővel $45°$-os szöget zár be. Milyen irányú és milyen nagyságú ilyenkor a perdületvektor? Bontsuk fel a szögsebességet a *5. ábrán* látható módon két összetevőre. A pálcára merőleges komponens nagysága $\omega/\sqrt{2}$, az ennek megfelelő perdület tehát

$$N = \Theta_2 \frac{\omega}{\sqrt{2}}. \tag{14}$$

A másik szögsebesség-komponens elhanyagolhatóan kicsiny tehetetlenségi nyomatékkal szorzódik, tehát ahhoz nem társítható számottevő nagyságú perdület. Az eredő impulzusnyomaték vektor tehát minden pillanatban merőleges a pálca szimmetriatengelyére, s emiatt a pálcával együtt ω szögsebességgel forog egy függőleges tengely körül. (Vegyük észre, hogy $\mathbf{N}$ iránya most *nem párhuzamos* a szögsebesség vektor irányával!) Mivel a perdület vektora egy $N/\sqrt{2}$ sugarú vízszintes kör mentén ω szögsebességgel forog, az egységnyi időre eső megváltozása

$$\left|\frac{\Delta \mathbf{N}}{\Delta t}\right| = \frac{N}{\sqrt{2}} \cdot \omega = \frac{\Theta_2 \omega^2}{2} = \frac{1}{12} m_1 l^2 \cdot \frac{\omega^2}{2}, \tag{15}$$

iránya pedig az ábra síkjába befele mutat. A pálca forgásának egyenlete tehát (11) és (12) felhasználásával:

$$(F_1 - F_2 + K)\, \frac{l_1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{24} m_1 l^2 \cdot \omega^2. \tag{16}$$

A (9), (10) és (16) egyenletek már egyértelműen meghatározzák a pálcára ható erőket, s ha például K-t kiszámítjuk, éppen az I. megoldásban más módszerrel megkapott formulához jutunk.

Megjegyezzük, hogy a fenti eljárás csak akkor alkalmazható, ha a szögsebességet a merev test úgynevezett fő tehetetlenségi tengelyei szerint bontjuk összetevőkre. Ezeket a tengelyeket általában nem könnyű elemi úton megtalálni; szerencsére fennáll az, hogy szimmetrikus tömegeloszlásoknál a főtengelyek a test szimmetriatengelyeivel esnek egybe. Vigyáznunk kell még arra is, hogy a forgási egyenleteinket a tömegközéppontra vonatkoztassuk. Általános tengelyre vonatkozó forgási egyenlet felírása, ha nem kellő körültekintéssel tesszük, könnyen hibás eredményre vezethet (mint arról részletesen írtunk 1993. évi 5. számunkban | A Szerk.).

Ennyi előtanulmány után már nem túl nehéz a két pálcából álló rendszer mozgásegyenleteinek felírása sem. A *6. ábrán* a testekre ható függőleges erőket a függőleges irányú gyorsulás hiányának megfelelően vettük fel. A vízszintes erőket az egyes pálcák tömegközépponti mozgásegyenletéből számíthatjuk ki:

$$F_1 = m_2 \left(l_1 - \frac{l_2}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \omega^2, \tag{17}$$

illetve(18)

$$F_2 - F_1 = m_1 \frac{l_1}{2\sqrt{2}} \omega^2.$$

Ha ezekből kifejezzük F_1-t és F_2-t, s ezeket a perdületváltozás és a (tömegközéppontokra vonatkoztatott) forgatónyomatékok közötti kapcsolat egyenleteibe helyettesítjük:

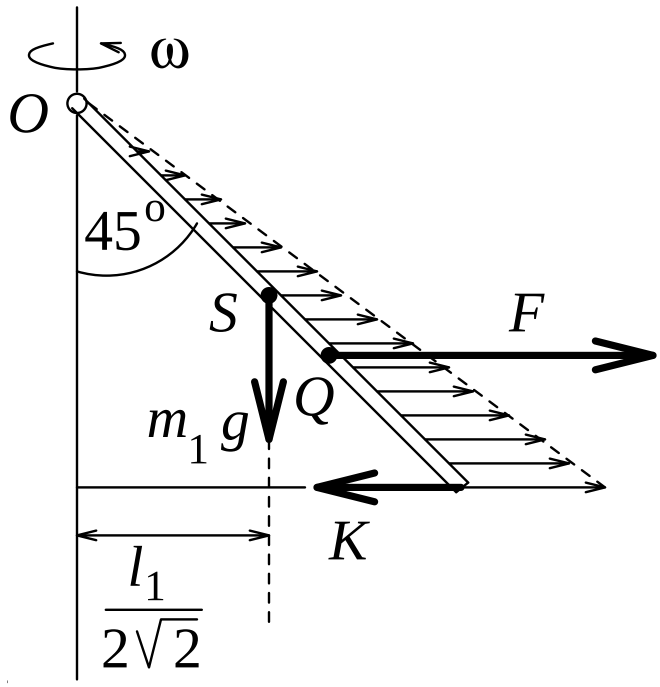
$$(m_2 g + F_1)\, \frac{l_2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{12} m_2 l_2^2 \cdot \frac{\omega^2}{2}, \tag{19}$$

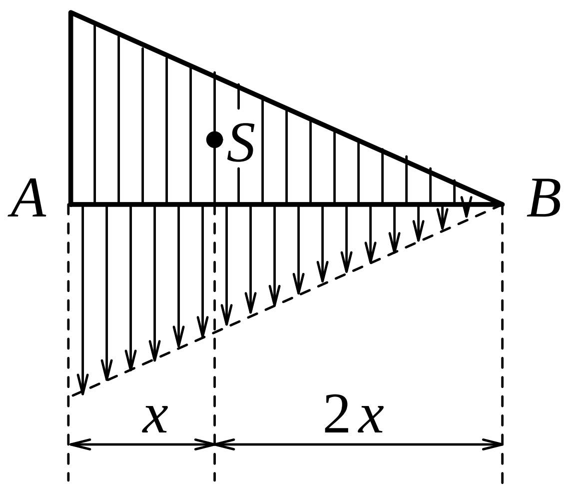
(a forgatónyomatékok előjelénél figyelembe vettük, hogy a perdület vektorának változása az ábra síkjából kifele mutat), továbbá

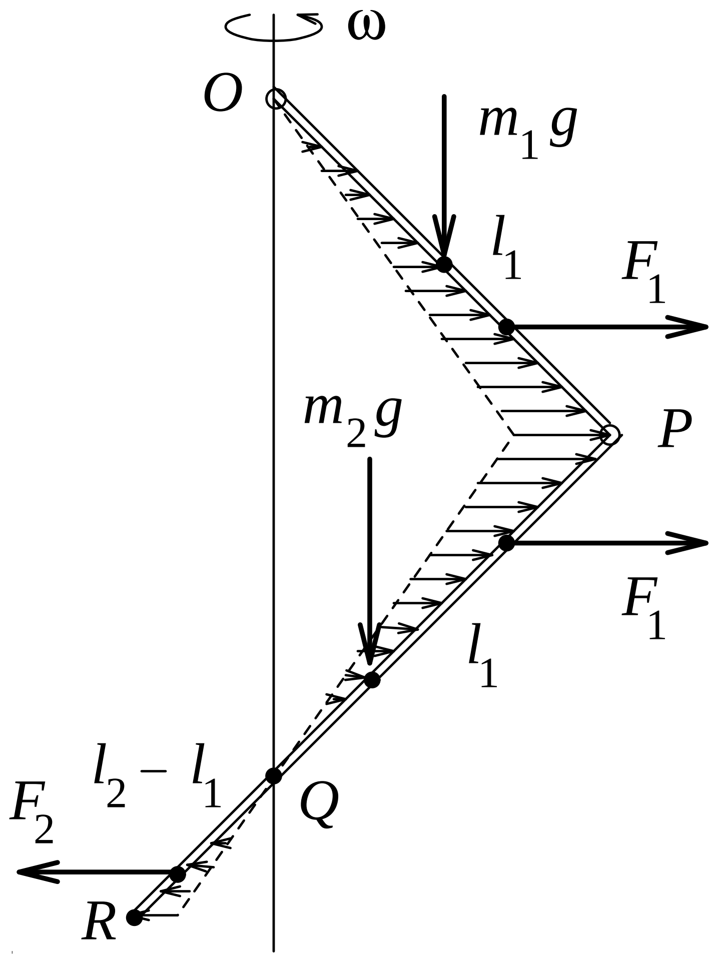
$$(F_1 + F_2 - m_1 g - 2m_2 g) \frac{l_1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{12} m_1 l_1^2 \cdot \frac{\omega^2}{2}, \tag{20}$$

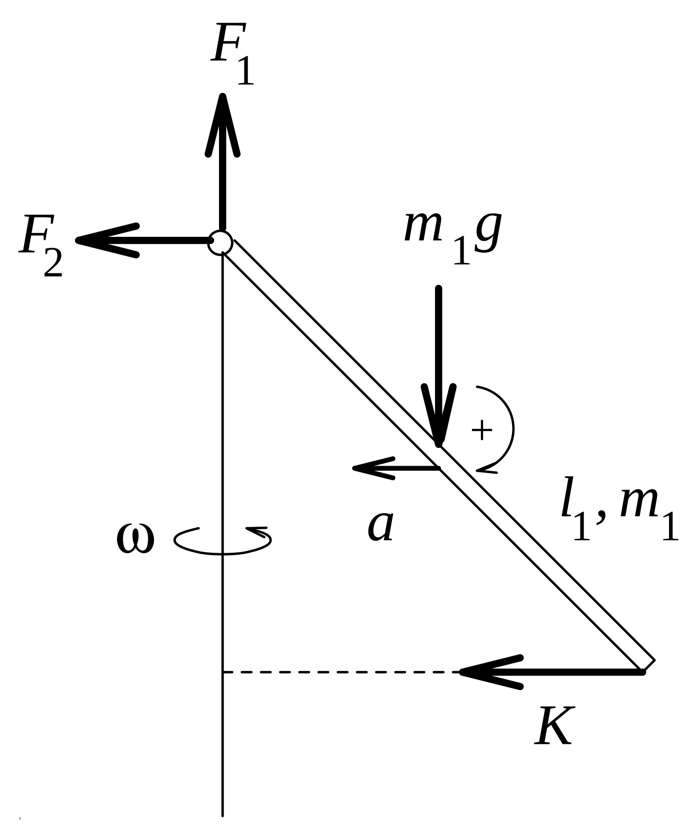
ahonnan algebrai átalakítások után megkapjuk az I. megoldásban adódott l_1/l_2 hosszarányt, illetve a motor fordulatszámát.

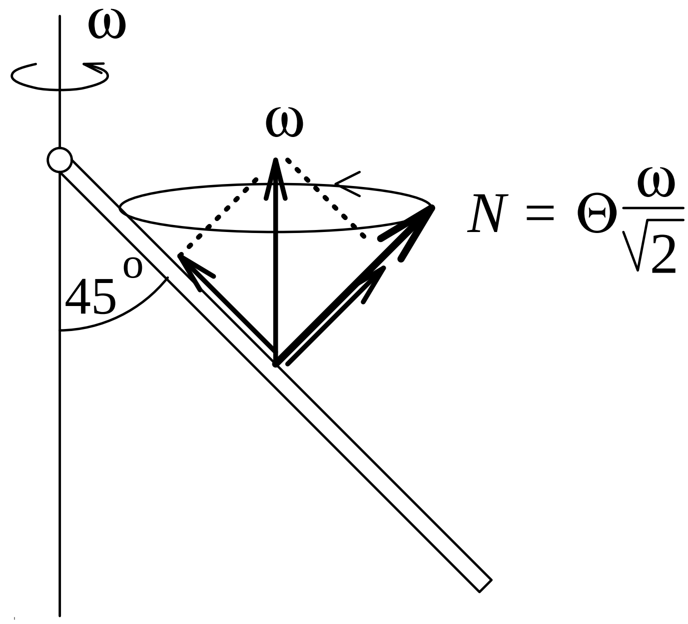
Németh Tibor (Győr, Révai M. Gimn., IV. o.t.) dolgozata alapján

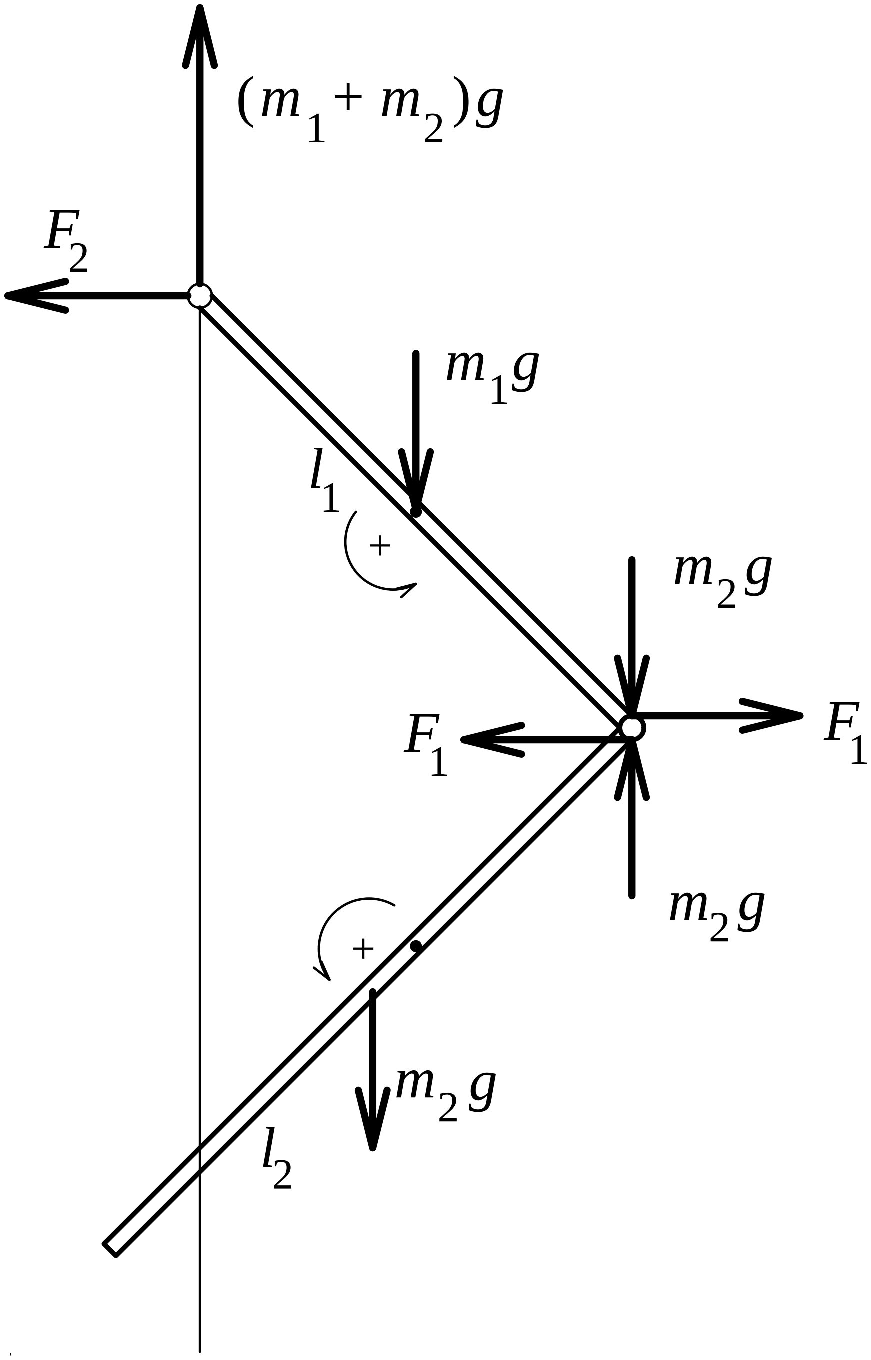

ω
O
45°
S
F
Q
$m_1 g$
K
$\frac{l_1}{2\sqrt{2}}$


S
A
B
x
2x


ω
O
$m_1 g$
l_1
F_1
P
$m_2 g$
F_1
l_1
$l_2 - l_1$
F_2
Q
R


F_1
F_2
$m_1 g$
+
a
l_1, m_1
ω
K


ω
ω
45°
$N = \Theta \frac{\omega}{\sqrt{2}}$



(m1 + m2)g
F2
m1g
l1
+
m2g
F1
F1
m2g
+
m2g
l2