A feladat rokona az **FF. 2739.** (KöMaL 1994/2. 88. old.) feladatnak, megoldása egy darabig hasonló vágányon futhat. A pálcára a G nehézségi erő, a henger falának N nyomóereje, a T tapadási súrlódási erő és a csuklóerő hat (utóbbit az *1. ábrán* nem tüntettük fel). Egyensúlyban a rúdra ható erők eredője és a forgatónyomatékok eredője nulla.

A csuklón átmenő függőleges z-tengelyre vonatkozó forgatónyomaték:

$$Nt\sin\beta + T_2 t\cos\beta = 0,$$

a csuklón átmenő, T_2-vel párhuzamos y-tengelyre vonatkozó pedig

$$Nh = T_1 t\cos\beta - G\frac{t}{2}\sin\beta = 0.$$

A rúd akkor nem csúszik meg, ha

$$T_1^2 + T_2^2 \le \mu_t^2 N^2,$$

ahol μ_t a tapadási súrlódási együttható. T_1 és T_2 kifejezhető az első két egyenletből, behelyettesítve azt kapjuk, hogy

$$N^2\left(\mathrm{tg}^2\beta + \frac{h^2}{t^2\cos^2\beta} - \mu_t^2\right) - NG\frac{h}{t\cos\beta} + \frac{G^2}{4} \le 0.$$

Az egyensúly feltétele az, hogy az adott körülmények mellett létezzen olyan nemnegatív N, amelyre az egyenlőtlenség teljesül.

Ha $\mu_t^2 > \mathrm{tg}^2\beta + \dfrac{h^2}{t^2\cos^2\beta}$, akkor az egyenlőtlenség bal oldala lefelé nyitott parabola, így elég nagy N-re biztosan teljesül. Ha $\mu_t^2 < \mathrm{tg}^2\beta + \dfrac{h^2}{t^2\cos^2\beta}$, akkor a bal oldal felfelé nyitott parabola, az egyenlőtlenség akkor teljesülhet, ha van pozitív valós gyöke. Nemnegatív diszkrimináns esetén ez igaz, utóbbihoz pedig $\mu_t^2 \ge \mathrm{tg}^2\beta$ szükséges.

Meghatározzuk $\mathrm{tg}\,\beta$ legnagyobb értékét. $\beta < 90^\circ$ a Thalész-tétel miatt, ezért $\mathrm{tg}\,\beta$ akkor maximális, ha β maximális. Az AOB háromszögben $\sin\beta = \dfrac{s}{r}\sin\alpha$, ezért β akkor a legnagyobb, amikor $\alpha = 90^\circ$, ekkor $\mathrm{tg}\,\beta = \dfrac{s}{\sqrt{r^2-s^2}}$ (*2. ábra*). Ha a pálca elég hosszú, akkor megvalósulhat az $\alpha = 90^\circ$-os helyzet, ilyenkor az egyensúly feltétele

$$\mu_t \ge \frac{s}{\sqrt{r^2-s^2}}.$$

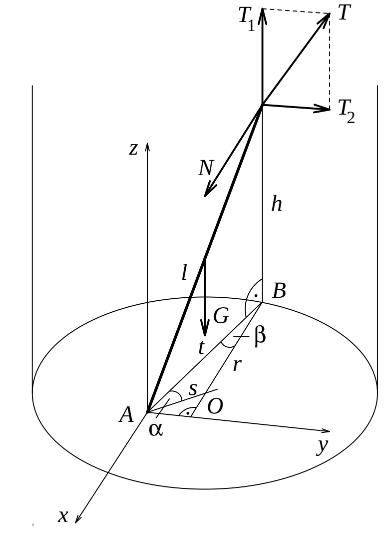
Több dolgozat alapján

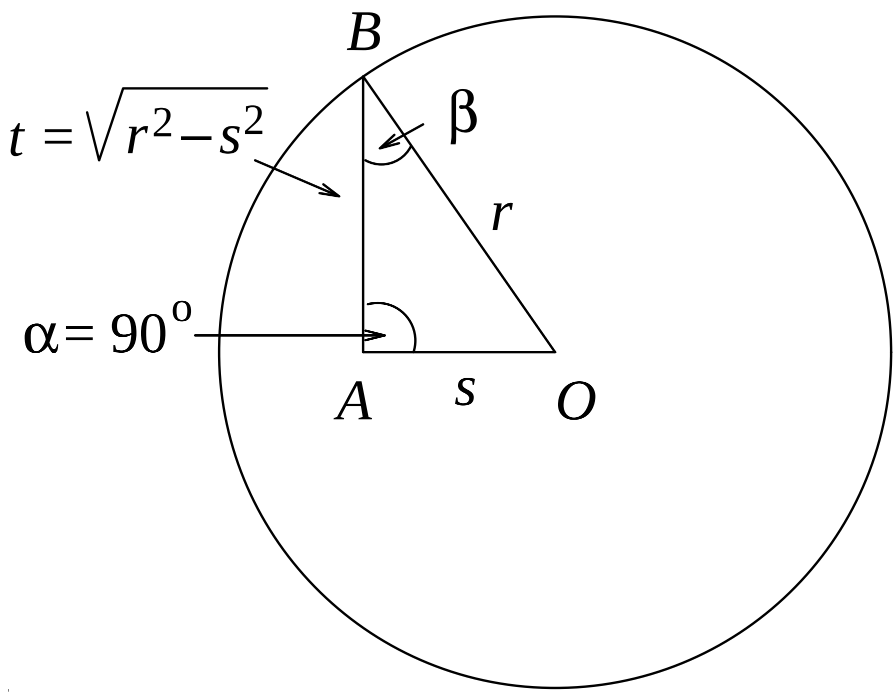
Megjegyzések. 1. Hogy $\mu_t \ge \mathrm{tg}\,\beta$ szükséges feltétel, azt egyedül az z-tengelyre vonatkozó forgatónyomaték egyenletből is megkaphatjuk. Abból $\dfrac{|T_2|}{|N|} = \mathrm{tg}\,\beta$, és $\mu \ge \dfrac{T}{N} \ge \dfrac{|T_2|}{N} = \mathrm{tg}\,\beta$. Hogy ez elegendő feltétel, az végül is annak következménye, hogy az egyensúlyi egyenletek nem határozzák meg egyértelműen az erőket. Tetszőleges megoldáshoz mindig hozzáadhatunk egy a csuklónál ható F_1 és egy a falnál ható F_2 erőt, amelyekre $F_1 + F_2 = 0$, és mindkettő a pálca irányába mutat. Ezzel állíthatjuk be az N nyomóerőt a szükséges értékre, hogy teljesüljön a megoldásban leírt egyenlőtlenség.

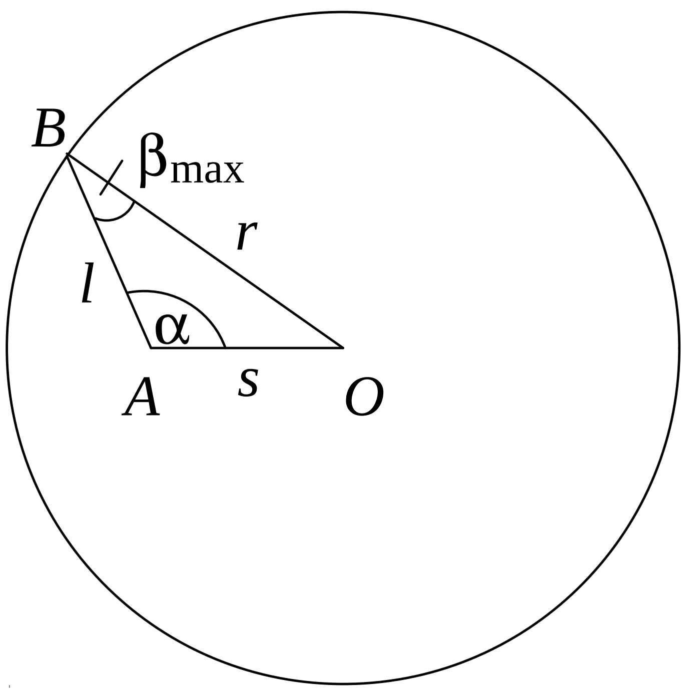
2. $\alpha = 90^\circ$ akkor lehetséges, ha $l \ge \sqrt{r^2-s^2}$ (*2. ábra*). Az $l < \sqrt{r^2-s^2}$ esetben $\mathrm{tg}\,\beta$ akkor veszi fel maximumát, amikor $\sin\alpha$ maximális, vagyis amikor α minimális ($\alpha > 90^\circ$). Az AOB háromszögre felírva a koszinusztételt:

$$s^2 = l^2 + r^2 - 2lr\cos\beta_{\max}.$$

Innen: $\mathrm{tg}\,\beta_{\max} = \dfrac{\sqrt{1-\cos^2\beta_{\max}}}{\cos\beta_{\max}} = \dfrac{\sqrt{4l^2r^2 - (l^2+r^2-s^2)^2}}{l^2+r^2-s^2}$, az egyensúly (tapadás) feltétele pedig $\mu \ge \mathrm{tg}\,\beta_{\max}$.




B
$t = \sqrt{r^2 - s^2}$
β
r
$\alpha = 90^o$
A
s
O


B
β_{max}
r
l
α
A
s
O