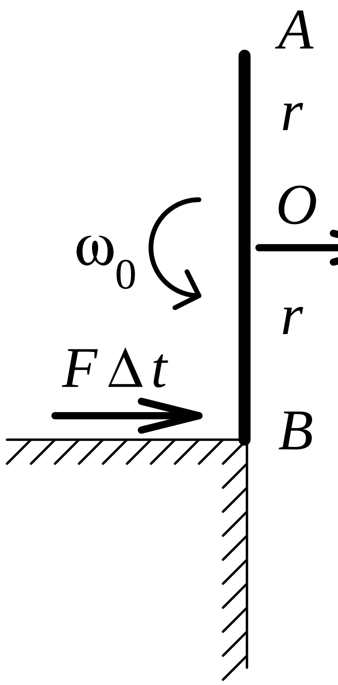
Jelöljük a pálca fele hosszúságát r-rel, tömegközéppontját O-val, végpontjait pedig A-val, illetve B-vel (*1. ábra*). Az alsó végét rövid Δt ideig tartó F erővel megütve $F \cdot \Delta t$ impulzust adunk át a pálcának, amelynek hatására a tömegközéppontja v_0 sebességgel kezd mozogni. Newton II. törvénye szerint



1. ábra

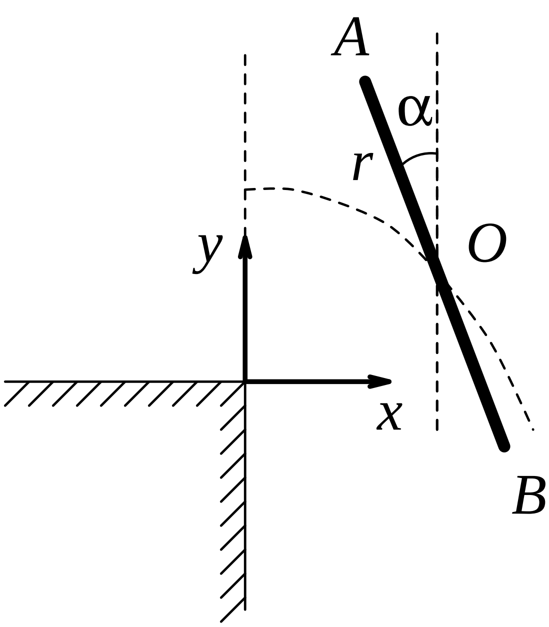
$$\Delta I = F\Delta t = m \cdot \Delta v = mv_0, \tag{1}$$

ahol m a pálca tömege. Az erőlködés nemcsak lendületet, hanem (a tömegközéppontra vonatkoztatva) perdületet is ad a pálcának. Az $F \cdot r$ forgatónyomaték Δt idő alatt

$$\Delta N = F \cdot r \cdot \Delta t = \Theta \cdot \Delta\omega = \frac{1}{3}mr^2 \cdot \omega_0 \tag{2}$$

lendületváltozást okoz, ahol ω_0 a pálca szögsebessége az ütés után. (Feltételezzük, hogy a pálca tömegeloszlása homogén, s emiatt a tömegközéppontra vonatkoztatott tehetetlenségi nyomatéka $\Theta = m(2r)^2/12 = mr^2/3$.) Az (1) és (2) egyenleteket összevetve azt kapjuk, hogy

$$r\omega_0 = 3v_0. \tag{3}$$



2. ábra

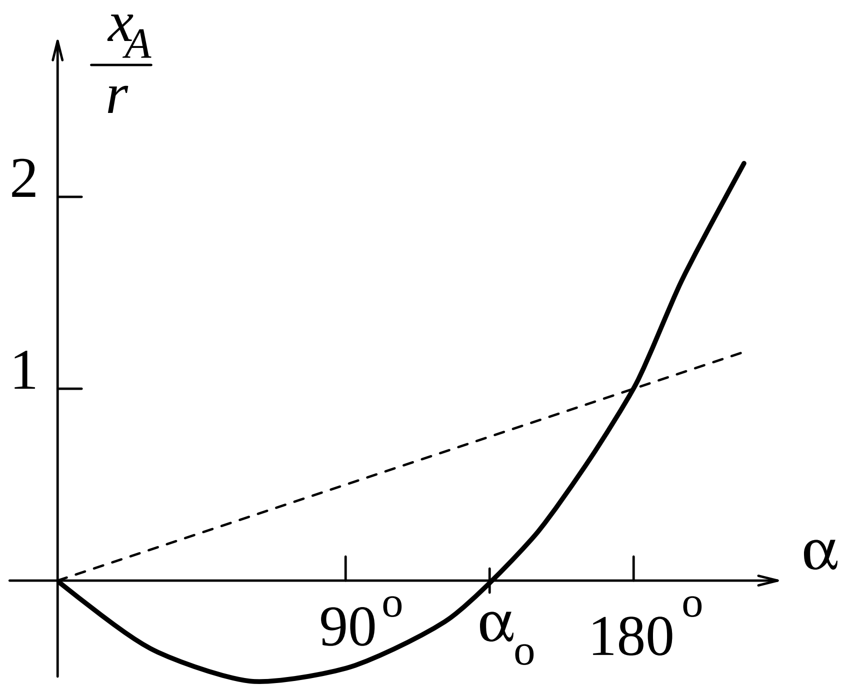
A továbbiakban a pálca a tömegközéppontja v_0 kezdősebességű vízszintes hajításnak megfelelő mozgást végez, a pálca egésze pedig ω_0 (állandó) szögsebességgel forog a tömegközéppont körül.

Írjuk le a pálca A pontjának mozgását az asztal széléhez rögzített koordináta-rendszerben:

$$x_A(t) = v_0 t - r\sin\alpha, (4) y_A(t) = r - \frac{g}{2}t^2 + r\cos\alpha, (5)$$

ahol $\alpha = \omega_0 t$. Fejezzük ki (3) segítségével v_0-t ω_0-lal, illetve írjuk le a mozgást az idő helyett a vele arányos α szög segítségével:

$$x_A(\alpha) = r\left(\frac{1}{3}\alpha - \sin\alpha\right), (6) y_A(\alpha) = r\,(1+\cos\alpha) - \frac{g}{18}\frac{r^2\alpha^2}{v_0^2}. (7)$$



3. ábra

Az $x_A(\alpha)$ függvényt ábrázolva (*3. ábra*) láthatjuk, hogy kezdetben az A pont az asztal fölött található ($x_A < 0$), egy bizonyos α_0 szögelfordulásnál éppen az asztal széle fölött lesz, utána pedig már mindig az asztaltól jobbra. Az α_0 kritikus értéket a (6) egyenletből határozhatjuk meg numerikusan: $\alpha_0 \approx 2{,}28$ radián $\approx 130{,}6^\circ$.

Ha az $\alpha = \alpha_0$ szögelfordulásnak megfelelő pillanatig az A pont még az asztal síkja fölött található (vagyis $y_A(\alpha_0) > 0$), akkor a továbbiakban az A pont már biztosan nem ütközhet az asztalnak. Belátható, hogy ebben az esetben a pálca más pontja sem ütközhet az asztalnak. A keresett feltétel tehát (7) alapján

$$v_0^2 > \frac{gr}{18} \cdot \frac{\alpha_0}{1+\cos\alpha_0}.$$

A pálca B pontjának kezdősebessége tehát legalább

$$v_B = v_0 + r\omega_0 = 4v_0 = \sqrt{\frac{8}{9}gr\frac{\alpha_0^2}{1+\cos\alpha_0}} = 4\sqrt{gr}\sin\frac{\alpha_0}{2} \approx 3{,}6\sqrt{gr}$$

nagyságú kell legyen. (Ez 40 cm hosszú pálcánál kb. 5 m/s sebességnek felel meg.)

Elek Péter (Budapest, Árpád Gimn., III. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzések. 1. A pálca tömegközéppontjának sebessége és a szögsebesség közötti (3) összefüggést a perdületmegmaradás tételéből is megkaphatjuk. A B pontban ható erőnek nincs forgatónyomatéka erre a pontra, tehát a pálca összes impulzusnyomatéka, vagyis a haladó mozgásból származó mv_0r és a forgásból adódó $-mr^2\omega_0^2/3$ összege a kezdeti nulla értékkel egyenlő kell maradjon.

Varga Dezső (Miskolc, Földes F. Gimn., IV. o.t.)

2. A kritikus α_0 szögelfordulást megadó $\alpha = 3\sin\alpha$ transzcendens egyenletet egy zsebszámológéppel is könnyen és gyorsan megoldhatjuk az $\alpha_{n+1} = \sin\alpha_n + (2/3)\alpha_n$ iterációs képlet segítségével. Az $\alpha_1 = 2$ kezdőértékből, mint durva közelítésből kiindulva néhány iteráció után $\alpha_0 = 2{,}278\,862\,66$ értéket kapunk, ami | a fizikai feladat igényeit messze meghaladó pontossággal | kielégíti az $\alpha = 3\sin\alpha$ egyenletet.

Tóth Gábor Zsolt (Budapest, Árpád Gimn., III. o.t.)