I. megoldás. A labdára az mg nehézségi erő, a víz által kifejtett felhajtóerő és a lyuk pereme által kifejtett nyomóerő hat. Abban a pillanatban, amikor a labda éppen elválik a lyuktól, a nyomóerő nulla, tehát a felhajtóerő éppen egyenlő a labda súlyával.

Számítsuk ki a víz által a labdára kifejtett erőt! (A külső légnyomásról megfeledkezhetünk, mert az a labda felületének minden pontjában ugyanakkora értékkel növeli meg a nyomás nagyságát, s így a labdára ható eredő erőt nem befolyásolja.) Jelöljük a labda vízbe merülő részének térfogatát V-vel, ez r és R ismeretében nyilván egyértelműen kiszámítható: $V = V(r, R)$. Ha a lyuk mentén, síkban képzeletben elvágnánk (s a vágás mentén befoltoznánk) a labdát, majd a csonkított labda alá is vizet engednénk, akkor a felhajtóerő nyilván

$$F_1 = \varrho g \cdot V(r, R)$$

lenne, ahol ϱ a víz sűrűsége. Tekintettel arra, hogy a lyuk alatt ténylegesen nincsen víz, az ott ható

$$F_2 = \varrho g h \cdot r^2 \pi$$

erő „hiányzik”, tehát a víz által a gömbre kifejtett felhajtóerő h vízmagasság esetén:

$$F = \varrho g \cdot V(r, R) - \varrho g h \cdot r^2 \pi.$$

Látható, hogy elegendően nagy h esetén F negatív, tehát a „felhajtóerő” függőlegesen lefelé mutat. Csökkentve h-t F egyre nagyobb lesz (feltételezve, hogy a labda teteje nem bukkan ki a vízből). A labda annál a h_0 vízmagasságnál emelkedik fel, amelynél $F = mg$, vagyis amikor

$$h_0 = \frac{V(r, R)}{r^2 \pi} - \frac{m}{r^2 \pi \varrho}.$$

Táblázatból kikereshető képlet szerint a feladatban szereplő gömbszelet térfogata

$$V(r, R) = \frac{\pi}{3}\left[2R^3 + (2R^2 + r^2(\sqrt{R^2 - r^2}\right],$$

s ennek felhasználásával

$$h_0 = \frac{2R^3}{3r^2} + \frac{2R^2 + r^2}{3r^2}\sqrt{R^2 - r^2} - \frac{m}{r^2 \pi \varrho}.$$

Ne feledkezzük el arról, hogy a fenti képlet csak addig érvényes, amíg a labda tetejét ellepi a víz, vagyis amíg $h > R + \sqrt{R^2 - r^2}$. Ellenkező esetben $V(r, R)$ képlete módosul: egy gömbréteg térfogatát kell kiszámítanunk. A kritikus h_0 vízmagasságra ilyenkor egy harmadfokú egyenletet kapunk:

$$\frac{3m}{R^2 \pi \varrho} = \left(\frac{h_0}{R}\right)^2 \left(3\sqrt{R^2 - r^2} - h_0\right).$$

Németh Tibor (Győr, Révai M. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Számítsuk ki a víz által a labdára kifejtett F felhajtóerőt a h vízmagasság függvényében! Célszerű bevezetni a $\cos\alpha_0 = r/R$ és az $l = R \sin\alpha_0 = \sqrt{R^2 - r^2}$ jelöléseket (lásd az *1. ábárt*).

Az I. megoldásban szereplő gondolatmenettel, vagy esetleg a labdának víz alatti részét képzeletben vékony szeletekre vágva és a hidrosztatikai nyomásból adódó erő függőleges komponensét összegezve (integrálva) kapjuk, hogy

$$F(h) = \begin{cases} \left[(h-l)\dfrac{\cos^2\alpha_0}{2} - \dfrac{R}{3}(1 + \sin^3\alpha_0)\right] \cdot 2\pi R^2 \varrho g, & \text{ha } h > R + l, \\ \left[\dfrac{(h-l)^3}{6R^2} - \dfrac{l^2(h-l)}{2R^2} - \dfrac{l^2}{3R^2}\right] \cdot 2\pi R^2 \varrho g, & \text{ha } h < R + l. \end{cases}$$

Ez a függvény egy lineáris és egy harmadfokú függvényből áll össze *(2. ábra)*.

A kritikus h_0 vízmagasságot úgy kapjuk meg, hogy megkeressük, hol metszi az $F(h)$ függvény az $F = mg$ egyenest. Deriválással közvetlenül adódik, hogy $F(h)$ a maximumát $h = 2l$ értéknél veszi fel, s a maximum értéke $4l^2\pi\varrho/3$. Ha a labda súlya nagyobb ennél az értéknél (amely éppen megegyezik egy l sugarú gömbben lévő víz súlyával), akkor a víz nem képes felemelni a labdát, bármekkora legyen is a h vízmagasság.

Salk Miklós (Pécs, Babits M. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján