I. megoldás. Jelöljük a síelő sebességét a pálya legfelső P_1 pontjában v_1-gyel, a legalsó P_2 pontban pedig v_2-vel, a talaj által a síelőre kifejtett nyomóerőt pedig N_1 és N_2-vel!

1. ábra

A Newton-féle mozgásegyenlet alapján

$$mg - N_1 = \frac{mv_1^2}{R}, \text{ illetve } mg - N_2 = -\frac{mv_2^2}{R}, \tag{1}$$

ahol R a színusz-függvényhez illeszkedő simulókör sugara, az ún. görbületi sugár a P_1 (és P_2) pontban. A pálya alakját a

$$h(x) = A \sin kx \tag{2}$$

függvénnyel írhatjuk le, ahol A a hullám amplitúdója, $k = 2\pi/\lambda$ pedig az ún. hullámszám.

Az energiamegmaradás törvénye szerint:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mg \cdot 2A = \frac{1}{2}mv_2^2,$$

a pálya legmélyebb pontján a sebesség:

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + 4gA},$$

s innen (1) felhasználásával

$$N_1 = m\left(g - \frac{v_1^2}{R}\right), \quad N_2 = m\left(g + \frac{v_1^2}{R} + 4g\frac{A}{R}\right). \tag{3}$$

A továbbiakban már csak egyetlen feladatunk van, az R görbületi sugár kiszámítása. Ezt többféle módon is megtehetjük.

Képzeljük el, hogy egy test (nem a feladatban szereplő síelő, hanem valaki más) vízszintesen egyenletes v_0 sebességgel mozog a színuszgörbén: $x = v_0t$. A függőleges elmozdulása ekkor

$$h(t) = A \sin kv_0t,$$

vagyis a mozgása A amplitúdójú, $\omega = kv_0$ körfrekvenciájú rezgőmozgás. Ismert, hogy ennek a mozgásnak a tetőpontbeli gyorsulás

$$|a| = A\omega^2 = Ak^2v_0^2.$$

másrészt a simulókör menti v_0 sebességű mozgásra $a = v_0^2/R$. A kétféle módon kiszámított gyorsulást összevetve a P_1 és P_2 pontbeli görbületi sugárra:

$$R = \frac{1}{Ak^2} = \left[2m \cdot \left(0,2m^{-1}\right)^2\right]^{-1} = 12,5m \tag{4}$$

adódik. A többi ismert adatot is behelyettesítve (3)-ból végül a keresett nyomóerők:

$$N_1 = 469N, \qquad N = 1085N.$$

Fábián László (Dombóvár, Illyés Gy. Gimn., II. o. t.) és
Szabó Zsolt (Veszprém, Lovassy L. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján

II. megoldás. A görbületi sugár kiszámítható a matematika-táblázatokban megtalálható

$$R = \frac{\left[1 + h'(x)^2\right]^{3/2}}{|h''(x)|}$$

képlet alapján, ahol a vessző a deriválást jelöli. Mivel a (2)-beli függvényre

$$h'(x) = Ak \cos kx \text{ és } h''(x) = -Ak \sin kx,$$

s ezeket a kifejezések $kx = \pi/2$-nél (vagy $3\pi/2$-nél) kell tekintenünk, a sugárra $R = \left(Ak^2\right)^{-1}$ adódik, összhangban (4)-gyel.

Füzesi Csaba (Debrecen, Gábor D. Elektronikai Műsz. Középisk., III. o. t.)

III. megoldás. Toljuk el a koordináta-rendszerünk kezdőpontját egy negyed hullámhosszal, s keressük meg az $y(x) = A\cos kx$ függvény P pontbeli simulókörének sugarát. Mi a feltétele annak, hogy az $O(0,v)$ középpontú, R sugarú kör áthaladjon a $P(0;2), S(d;A\cos kd)$ pontpáron? A kör egyenlete:

$$x^2 + (y-v)^2 = R^2,$$

ebbe a P, illetve S koordinátáit behelyettesítve

$$A - v = R,$$
$$d^2 + (A\cos kd - v)^2 = R^2$$

adódik. Ezekből kiszámíthatjuk, hogy a görbületi sugár

$$R = \frac{d^2 + A^2(a - \cos kd)^2}{2A(1 - coskd)}.$$

Válasszunk egy kicsiny d értéket, mondjuk 0,5 m-t; ekkor a fenti képlet szerint $R = 12,51$ m. Ha az S pontot még közelebb hozzuk P-hez, pl. $d = 0,1$ m-nyire, akkor $R = 12,5006$ m adódik. Nyugodtan kijelenthetjük tehát, hogy a feladat adatainak megfelelő pontosságig $R = 12,5$ m.

Kovács Krisztián (Békéscsaba, Kemény Gábor Műsz. Szki., III. o. t.)

*Megjegyzések.*1. A $h[x(t)] = A\sin kx(t)$ függvény deriválásával is megkapható a függőleges gyorsulás,

$$v_f = \frac{dh}{dt} = Ak\frac{dx}{dt} \cdot \cos kx(t),$$

$$a_f = \frac{dv_f}{dt} = -Ak^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \cdot \sin kx + Aka_{\text{vízszintes}}\cos kx.$$

A pálya tetőpályán $a_{fggleges} = -Ak^2 \cdot v^2_{\text{vízszintes}}$, s ebből a Newton-egyenletet alkalmazva a nyomóerő közvetlenül adódik.

Ravasz Erzsébet (Sepsiszentgyörgy, Mikes K. Líceum, III. o. t.)

2. Többen a $g = 10m/s^2$ közelítéssel éltek, s így $N_1 = 480N, N_2 = 1104N$-t kaptak. Ez a közelítés túlságosan durva, a jelen esetben nem indokolt.

3. Sokan — hibásan — a $v_2 = v_1 + \sqrt{4gA}$ képlettel számolták a síelő sebességét a pálya legmélyebb pontjában. Vigyázat: az energiák, nem pedig a sebességek adódnak össze!