Megoldás. 1. Amikor a bolha W munkával egyedül ugrik, akkor kezdősebessége $v=\sqrt{\dfrac{2W}{M}}$, ahol M a bolha tömege.

$$T=\frac{2v_y}{g}=\frac{2v\sin\alpha}{g}=\frac{2\sin\alpha}{g}\sqrt{\frac{2W}{M}}$$

ideig van levegőben, ezalatt

$$Tv_x=Tv\cos\alpha=\sin 2\alpha\frac{2W}{Mg}$$

távolságra ugrik. Egyéni csúcsa tehát ($\alpha=45^\circ$ mellett) $\dfrac{2W}{Mg}$.

2. Amikor kistestvérével a hátán ugrik, akkor kezdősebessége, $v'=\sqrt{\dfrac{2W}{M+m}}$, m a kistestvér tömege.

$$T=\frac{2v'_y}{g}=\frac{2\sin\alpha}{g}\sqrt{\frac{2W}{M+m}}$$

ideig van a levegőben, $\dfrac{T}{2}$ ideig v'_x sebességgel mozog vízszintesen, $\dfrac{T}{2}$ ideig v'_x+v_1 sebességgel, az ugrás távolsága így $Tv'_x+\dfrac{T}{2}v_1$.

A v_1 sebességet úgy határozhatjuk meg, hogy a pálya csúcspontján alkalmazzuk a lendület- és az energiamegmaradás törvényét. A v'_x sebességgel mozgó rendszerben

$$0=Mv_1+mv_2,\qquad \frac{1}{2}Mv_1^2+\frac{1}{2}mv_2^2=W.$$

E két egyenletből $v_1=\sqrt{\dfrac{2Wm}{M(M+m)}}$, így a második ugrás távolsága

$$\frac{2W}{g(M+m)}\left(\sin 2\alpha+\sin\alpha\sqrt{\frac{m}{M}}\right).$$

A csúcsjavítás akkor sikerül, ha

$$\frac{2W}{g(M+m)}\left(\sin 2\alpha+\sin\alpha\sqrt{\frac{m}{M}}\right)>\frac{2W}{gM},$$

azaz

$$\sin 2\alpha+\sin\alpha\sqrt{\frac{m}{M}}>1+\frac{m}{M}.$$

Ha például $\alpha=45^\circ$, akkor $M>2m$ esetén sikerül a csúcsjavítás.

Kovács Baldvin (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Vizsgáljuk meg részletesebben, milyen tömegarány és elugrási szög mellett teljesül az egyenlőtlenség. Rendezés után

$$\left(\sqrt{\frac{m}{M}}-\frac{\sin\alpha}{2}\right)^2+1-\sin 2\alpha-\frac{\sin^2\alpha}{4}<0.$$

Ez csak úgy állhat fenn, ha $1-\sin 2\alpha-\dfrac{\sin^2\alpha}{4}<0$, amiből

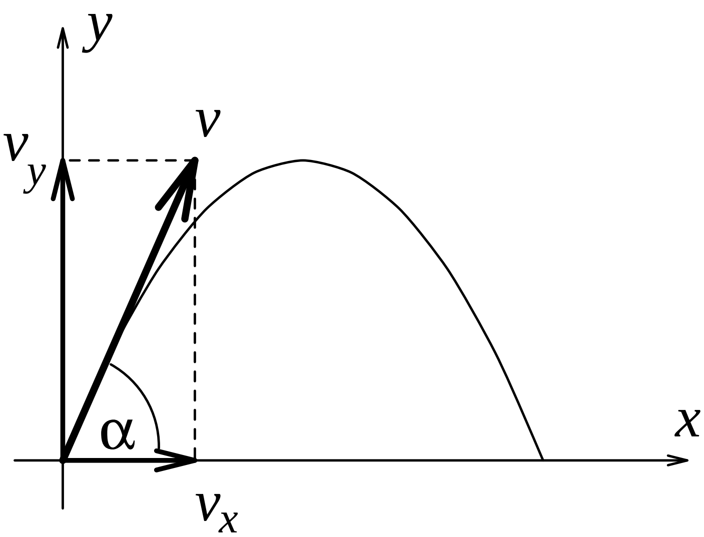
$$\frac{2}{\sqrt{13}}<\sin\alpha<\frac{2}{\sqrt{5}},\qquad \text{és}\qquad 35{,}7^\circ<\alpha<63{,}8^\circ.$$

Ebbe a tartományba eső α mellett az egyenlőtlenség akkor teljesül, ha

$$\frac{\sin\alpha-\sqrt{\sin^2\alpha+4\sin 2\alpha-4}}{2}<\sqrt{\frac{m}{M}}<\frac{\sin\alpha+\sqrt{\sin^2\alpha+4\sin 2\alpha-4}}{2}.$$

$\alpha=45^\circ$ esetén az alsó határ 0, tehát a kistestvér tömege tetszőlegesen kicsi lehet, akármilyen nagy nyilvánvalóan nem.

G. L.


y
v
v_y
α
x
v_x