A rúdból és a végén elhelyezkedő testből álló rendszer össztömege $M = 11m$, a tömegközéppontja a csúszkától $s = \frac{21}{22}l$ távolságban helyezkedik el, a tömegközéppontjára vonatkoztatott tehetetlenség nyomatékát pedig jelöljük $\Theta = kMs^2$ módon, ahol $k = \frac{41}{1323} = 0,031$. (Ez utóbbi számot pl. a Steiner-tétel segítségével számolhatjuk ki.)

a) A rendszerre ható külső erők (az Mg nehézségi erő és a csúszkánál fellépő N nyomóerő) függőlegesek, így — vízszintes erő hiányában — a tömegközéppont egy függőleges egyenes mentén fog mozogni. Jelöljük a tömegközéppont gyorsulását a-val, a rendszer szöggyorsulását pedig β-val *(1. ábra)*. A mozgásegyenletek:

$$Mg - N = Ma, \tag{1}$$

$$N \cdot s = (kMs^2)\beta. \tag{2}$$

Az α és β mennyiségek nem függetlenek egymástól, közöttük az a feltétel teremt kapcsolatot, hogy a csúszka függőleges sebessége is és gyorsulása is nulla kell legyen. A *2. ábra* és *3. ábra* alapján ez a következő megszorítást jelenti:

$$v - s\omega\cos\alpha = 0, \tag{3}$$

$$a + s\omega^2\sin\alpha - s\beta\cos\alpha = 0. \tag{4}$$

Végül felírhatjuk még az energiamegmaradás egyenletét:

$$\frac{1}{2}M^2v = \frac{1}{2}\left(kMs^2\right)\omega^2 = Mgs\cdot\sin\alpha. \tag{5}$$

A fenti egyenletből N kifejezhető α függvényeként *(4. ábra)*:

$$N(\alpha) = \frac{(k + 2 - 2\cos^2\alpha)k}{(k + \cos^2\alpha)^2}11mg, \tag{6}$$

illetve a $\cos\alpha = 1 - x/s$ összefüggés felhasználásával az x elmozdulás függvényeként *(5. ábra)*:

$$N(x) = \frac{k\left(k + 2 - 2\cdot\left(1 - \frac{x}{s}\right)^2\right)}{\left[k + \left(1 - \frac{x}{s}\right)^2\right]^2}\cdot 11mg. \tag{7}$$

Látható, hogy az N erő a rúd függőleges helyzetének közelében erősen megnő, a legnagyobb értéke $N_{\max} = 720,3mg = 65,5Mg$.

b) Ha a súrlódási együttható elegendően kicsi, akkor a mozgás első közelítésben a fentivel helyettesíthető. Az $S(x)7\mu N(x)$ csúszási súrlódási erő W munkája a $N(x)$ függvény görbe alatti területének μ-szörösével egyenlő. Ez az *5. ábráról* leolvashatóan

$$W \approx 180\mu mgl \approx 16\mu Mgl \approx 17\mu Mgs.$$

Ha μ elegendően kicsi lenne (pontosabban a $W << Mgs$, vagyis $\mu << 1/17 \approx 0,05$ teljesülne), akkor a maximális kilendülést a munkatételből számíthatnánk ki:

$$Mgs\sin\alpha_{\max} = W.$$

Például $\mu = 0,005$ esetén $W = 0,085Mgs$, s innen $\alpha_{\max} \approx 175^\circ$ adódna. (A feladat kitűzőjének eredeti szándéka szerint ekkora súrlódási együtthatóval kellett volna számolni.) A megadott $\mu = 0,05$ értékkel számolva azt látjuk, hogy a csúszási súrlódás a rendszer mechanikai energiájának 85%-át „elfogyasztja”, s az inga csak $\alpha_{\max} \approx 120^\circ$-os szögig lendül ki. Természetesen ekkor a számolás alapját képező feltevés (az, hogy a súrlódásmentes mozgás és a tényleges mozgás nem tér el nagyon egymástól) nem indokolt, s a fenti becslés csak durva közelítésnek tekinthető.

Major András (Stuttgart, Friedrich-Eugens-Gymn., IV. o. t.) és
Pálfalvi László (Pécs, Apáczai Csere J. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján