A magba zárt elektron mozgási energiája

$$E_{kin} = \sqrt{m_0^2 c^4 + p^2 c^2} - m_0 c^2, \tag{1}$$

ha az impulzusának nagysága p. Másrészt r sugarú gömbbe (az atommag méretének megfelelő tartományba) zárt részecske impulzusa a Heisenberg-féle összefüggés szerint nagyságrendileg

$$p \gtrsim \tfrac{1}{r}\hbar \tag{2}$$

kell legyen (ahol $\hbar = h/(2\pi)$ a Planck-állandó). Eszerint

$$E_{kin} \approx \sqrt{m_0^2 c^4 + \hbar^2 c^2/r^2} - m_0 c^2. \tag{3}$$

Felhasználhatjuk továbbá, hogy az A tömegszámú atommag sugara

$$r \approx r_0 \cdot \sqrt[3]{A}, \tag{4}$$

ahol r_0 a hidrogén atommagjának, a protonnak a sugara, 10^{-15} m nagyságrendű.

A Z rendszámú atommag elektrosztatikus terében tartózkodó elektron potenciális energiája a mag sugaránál

$$E_{pot} = \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r}. \tag{5}$$

Az elektron akkor nem szökik ki a magból, ha

$$E_{kin} < E_{pot}. \tag{6}$$

Felhasználva, hogy a transzurán elemekre $A/Z \approx 2,55$, a fenti összefüggésekből

$$\sqrt{m_0^2 c^4 + \frac{\hbar^2 c^2}{r_0^2 \cdot (2,5Z)^{2/3}}} - m_0 c^2 < \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0 \, (2,5Z)^{1/3}} \tag{7}$$

adódik, ami *numerikusan* megoldható:

$$Z > 134.$$

Veres Gábor (Balassagyarmat, Balassi B. Gimn. IV. o. t.)

Megjegyzés. A feladatban szereplő körülmények között $pc \gg m_0 c^2$, tehát (1) helyett számolhatunk az $E_{kin} \approx pc$ közelítő képlettel. Ekkor (7) lényegesen leegyszerűsödik:

$$\frac{\hbar c}{r} < \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 \cdot r},$$

ahonnan

$$Z > \frac{2\varepsilon_0 hc}{e^2} = 137.$$

A fenti kifejezésben szereplő $\dfrac{e^2}{2\varepsilon_0 hc} = 1/137$ mennyiséget finomszerkezeti állandónak nevezik és fontos szerepet játszik az atomfizikában.