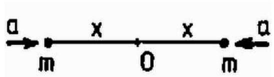
A rendszerre külső erők nem hatnak, így a tömegközéppontja nyugalomban marad. Szimmetria-okokból nyilvánvaló, hogy mindegyik tömegpont a sokszög középpontja felé mozog (nem egyenletes gyorsulással), s az alakzat minden időpillanatban szabályos n-szög marad.



1. ábra

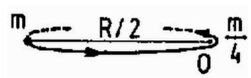
Legyen először $n = 2$. A testek mozgásegyenlete az 1. ábra jelöléseivel

$$m \cdot a = F(x,)$$

ahol

(1)
$$F(x) = \gamma \cdot \frac{m^2}{4x^2} = \gamma \frac{(m/4) \cdot m}{x^2},$$

Az egyes tömegpontok tehát éppen úgy mozognak, mintha egy $M = m/4$ tömegű rögzített test vonzaná őket.



2. ábra

Közelítsük a tömegpont ténylegesen egyenesvonalú mozgását egy nagyon kicsiny kistengelyű ellipszipálya menti mozgással (2. ábra)! Ha az m tömegű test $R/2$ távolságból indul a rögzített vonzócentrum felé, akkor az O pontba zuhanásának ideje éppen fele az $R/4$ félnagytengelyű ellipszispályán való mozgás T_1 keringési idejének:

(2)
$$T = T_1/2.$$

Másrészt egy $R/2$ sugarú körpályán mozgó test T_2 keringési idejére a mozgásegyenlet alapján fennáll, hogy

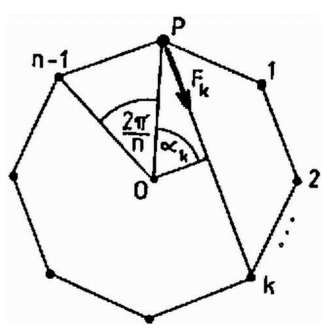
(3)
$$m \cdot \frac{R}{2} \cdot \left(\frac{2\pi}{T_2}\right)^2 = \gamma \frac{m \cdot (m/4)}{(R/2)^2}.$$

Kepler III. törvényét alkalmazva:

(4)
$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{R/4}{R/2}\right)^3,$$

ahonnan (2) és (3) felhasználásával

$$T_{n=2} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{R^3}{\gamma m}} \quad \text{adódik.}$$



3. ábra

Oldjuk meg most a feladatot tetszőleges n -re! Ha a testek éppen x távol vannak a sokszög középpontjától, akkor a 3. ábra jelöléseivel a P pontbeli testre ható eredő erő – amely a szimmetria miatt nyilván az O pont felé mutat –

$$F = \sum_{k=1}^{n} F_k \sin\alpha_k = \gamma \frac{m^2}{4x^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin(k\pi/n)}.$$

Látható, hogy a rendszer minden egyes eleme úgy mozog, mintha csak egyetlen egy, az O pontban rögzített és

$$M_n = \frac{m}{4} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin(k\pi/n)}$$

tömegű test vonzaná a távolság négyzetével fordítottan arányos erővel.

A kérdéses esetekhez tartozó „látszólagos" tömegek numerikus értékei:

$$M_2 = m/4 = 0,25 \cdot m; \quad M_3 = m/\sqrt{3} = 0,57 \cdot m; \quad M_{10} = 3,49 \cdot m.$$

A megfelelő esési idők Kepler III. törvényének felhasználásával az $n = 2$ esethez hasonlóan számíthatók. Ha a legközelebbi testek kezdetben R távol voltak egymástól, akkor az összeütközésig eltelő idők:

$$T_{n=3} = 0,64 \cdot \sqrt{\frac{R^3}{\gamma m}}, \quad \text{illetve} \quad T_{n=10} = 1,22 \cdot \sqrt{\frac{R^3}{\gamma m}}.$$

Szép János (Szolnok, Verseghy F. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján