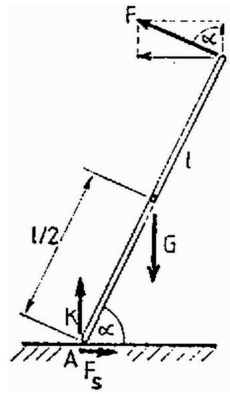
Feltételezhetjük, hogy a vonalzó homogén, tehát a tömegközéppontja a hosszának felénél helyezkedik el. Nagyon lassú mozgásnál a test – jó közelítéssel – egyensúlyi állapotban levőnek tekinthető, emiatt minden helyzetében fenn kell álljon a rá ható erők és azok forgatónyomatékának egyensúlya.



Az ábra jelöléseivel

$$F + G + K + F_S = 0,$$

ahol F_S a súrlódási erő, továbbá a nyomatékok (melyeket célszerű az A pontra vonatkoztatni):

$$M_F^{(A)} + M_G^{(A)} = 0.$$

Az erők egyensúlyának feltétele a vízszintes, illetve függőleges komponensekkel kifejezve:

$$F \sin\alpha = F_S, \tag{1}$$

$$mg = K + F\cos\alpha, \tag{2}$$

a forgatónyomatéki egyenlet pedig

$$mg\frac{l}{2}\cos\alpha = F\cdot l. \tag{3}$$

Ezekből az összefüggésekből K és F_S kifejezhető, s a tapadás $F_S \le \mu\cdot K$ feltétele

$$\mu \ge \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha} \qquad (0^\circ \le \alpha \le 90^\circ) \tag{4}$$

alakban fogalmazható meg. Látjuk, hogy a tapadási súrlódási tényező legkisebb megengedett értéke a (4) jobb oldalán szereplő $f(\alpha)$ függvény maximuma. Némi átalakítással

$$f(\alpha) = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\sin^2\alpha} = \frac{1}{2\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha},$$

s ez a függvény akkor maximális, ha a nevező minimális. Ez utóbbira viszont (a számtani és a mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenség alkalmazásával)

$$2\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha \geqslant 2\sqrt{2\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha} = 2\sqrt{2},$$

ahonnan (4) szerint a súrlódási együtthatóra

$$\mu \ge \frac{1}{2\sqrt{2}} \approx 0{,}35$$

adódik.

Kun Mariann (Szolnok, Széchenyi I. Gimn. III. o. t.) és
Takács Viktor (Dombóvár, Illyés Gy. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az $f(\alpha)$ függvény szélsőértéke más módszerrel (pl. differenciálszámítással, számítógépes ábrázolással, egy másodfokú egyenlet megoldhatósági feltételére való visszavezetéssel) is meghatározható.

2. Sokan elkövették azt a hibát, hogy a K nyomóerőt $mg/2$-vel helyettesítették, és az $F_S = F\cdot\sin\alpha = (mg/4)\cdot\sin(2\alpha)$ függvény maximumát keresték meg. Ez a számítás nem veszi figyelembe, hogy az emelés hatására K fokozatosan változik. A helyes számítás a megcsúszás legkritikusabb helyzetére $\alpha = \mathrm{arctg}(1/\sqrt{2}) \approx 35^\circ$ értéket ad, míg a $\sin(2\alpha)$ függvény a maximumát $\alpha = 45^\circ$-nál éri el.