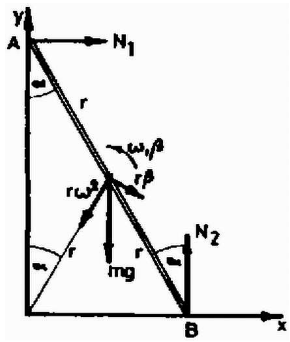
A rúdra az *1. ábrán* látható erők hatnak, ezek hatására a tömegközéppontja gyorsul, s a rúd tömegközéppontja körül elfordul.



1. ábra

Sem a tömegközéppont gyorsulása, sem pedig a szöggyorsulás nem állandó nagyságú, hanem időben bonyolult módon változó mennyiségek.

A rúd tömegközéppontja – legalábbis a mozgás első szakaszában – egy r sugarú körpályán mozog, ahol r=1,5 m a rúd félhosszúsága. A rúd szögsebességét ω-val, szöggyorsulását β -val jelölve a tömegközéppont érintő irányú gyorsulása $r \cdot \beta$, sugár irányú gyorsulása pedig $r \cdot \omega^2$.

Célszerű olyan mértékegységrendszert (hosszúság, idő- és tömegegységeket) választanunk, melyben $r = g = m = 1$ (m a rúd tömege). A számolás végén a dimenziókat figyelve könnyen visszatérhetünk a szokásos SI egységekre.

A rúd tömegközéppontjának mozgásegyenlete az *1. ábra* derékszögű koordináta-rendszerében:

$$N_1 = \beta \cdot \cos\,\alpha - \omega^2 \sin\,\alpha, \tag{1}$$

$$N_2 - 1 = -\beta \cdot \sin\,\alpha - \omega^2 \cdot \cos\,\alpha, \tag{2}$$

a forgómozgás egyenlete pedig

$$N_2 \cdot \sin\,\alpha - N_1 \cdot \cos\,\alpha = \frac{1}{3}\beta. \tag{3}$$

(Ez utóbbi egyenletnél felhasználtuk, hogy a rúd tehetetlenségi nyomatéka $m \cdot (2r)^2/12$ a választott mértékegységrendszerben 1/3.)

A rúd szögsebessége az energiamegmaradás törvénye segítségével határozható meg. Mivel a rúd tömegközéppontjának $v = r \cdot \omega = \omega$ sebessége $\alpha = \alpha_0 = 30^\circ$ -nál nulla volt, fennáll

$$\frac{1}{2}\omega^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \omega^2 + \cos\alpha = \cos\alpha_0,$$

ahonnan

$$\omega^2 = \frac{3}{2}(\cos\alpha_0 - \cos\alpha). \tag{4}$$

Az (1)–(4) egyenletekből bármilyen α szögre meghatározhatjuk az N_1, N_2, ω és β mennyiségek értékét. Például

$$N_1 = \frac{9}{4}\sin\,\alpha \cdot (\cos\,\alpha - \frac{2}{3}\cos\,\alpha_0), \tag{5}$$

továbbá

$$N_2 = \frac{1}{4}[(3\,\cos\,\alpha - \cos\,\alpha_0)^2 + \sin^2\,\alpha_0]. \tag{6}$$

Látható, hogy míg N_2 tetszőleges α esetén pozitív, addig N_1 egy bizonyos α_1 szögnél, amelyre

$$\cos\,\alpha_1 = \frac{2}{3}\cos\alpha_0, \tag{7}$$

nullává válik. Ennél a szögnél – melynek numerikus értéke a feladat számadataival $\alpha_1 = \arccos 1/\sqrt{3} = 54,7°$ – a rúd elválik a függőleges faltól, s a mozgás további részében $N_1 \equiv 0$.

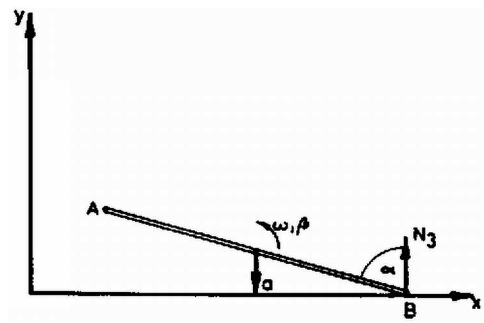
Az elválás pillanatában a rúd tömegközéppontjának vízszintes sebessége

$$v_x = \omega(\alpha = \alpha_1) \cdot \sin \alpha_1,$$

ami (4) és (7) figyelembe vételével

$$v_x = \sqrt{\frac{2}{9} \cos^3 \alpha_0}. \tag{8}$$

Ez a sebesség a mozgás további részében nem változhat meg, hiszen a rúdra már nem hat vízszintes irányú erő.



2. ábra

A rúd tömegközéppontja a továbbiakban függőlegesen lefelé gyorsul valamekkora (időben változó) a gyorsulással. A mozgásegyenletek a 2. *ábra* jelöléseivel:

$$N_3 - 1 = -a, \tag{9}$$

$$N_3 \sin \alpha = \frac{1}{3}\beta, \tag{10}$$

az energiamegmaradás tétele pedig az

$$\frac{1}{2}v_x^2 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \omega^2 + \cos \alpha = \cos \alpha_0 \tag{11}$$

alakot ölti, ahol v a tömegközéppont függőleges sebessége. Mivel a rúd alsó végének nincs függőleges sebessége, fenn kell álljon a

$$v - \omega \cdot \sin\alpha = 0 \tag{12}$$

összefüggés is. Hasonlóan, a rúd végpontjának függőleges gyorsulása is nulla, ahonnan

$$-a + \beta \cdot \sin \alpha + \omega^2 \cdot \cos \alpha = 0. \tag{13}$$

Elvben elképzelhető lenne, hogy valamekkora α szögnél az N_3 erő nullává válik, vagyis a rúd felemelkedik a talajról. A (9)–(13) egyenletek azonban azt mutatják, hogy ez mégsem következik be (lásd még a 2422. feladat megoldását az 1990/2 számban).

A földetérés pillanatában $\alpha = 90°$, ekkor a tömegközéppont függőleges sebességére

$$v = \sqrt{\frac{3}{2}(\cos \alpha_0 - \frac{1}{9} \cos^3 \alpha_0)},$$

a rúd másik végpontjának teljes sebessége pedig

$$v_A = \sqrt{v_x^2 + (2v)^2} = \sqrt{\frac{2}{9} \cos^3 \alpha_0 + 6(\cos \alpha_0 - \frac{1}{9} \cos^3 \alpha_0)}$$

adódik. A szokásos SI egységekre úgy térhetünk át, ha a fenti eredményt megszorozzuk m, r és g -ből képezhető sebesség dimenziójú mennyiséggel, $\sqrt{r \cdot g}$ -vel, s így végül

$$v_A = \sqrt{(6 \cos \alpha_0 - \frac{4}{9} \cos^3 \alpha_0) r \cdot g} = \sqrt{\frac{17 \cdot \sqrt{3}}{6} \cdot 1,5 \text{ m} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 8,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

adódik. Az A pont sebessége a vízszintestől

$$\beta = \mathrm{arctg}\frac{2v}{v_x} = \mathrm{arctg}\ \sqrt{3\left(\frac{9}{\cos^2\ \alpha_0}-1\right)} = \mathrm{arctg}\sqrt{33} = 80,1^\circ$$

szöggel tér el lefelé.

Megjegyzések. 1. Sok megoldó feltételezte, hogy a rúd tömegközéppontja mindvégig körpályán mozog, s az energia-megmaradás törvényéből számolva a lecsapódás sebességére $v_1 = 8,8$ m/s nagyságú, függőleges irányú vektort kaptak. Ha a tömegközéppont valóban így mozogna, akkor a vízszintes sebessége (amely kezdetben nulla volt) eleinte nőne, majd fokozatosan csökkenve ismét nullává válna. A csökkenő sebesség azonban negatív gyorsulásnak, az pedig negatív vízszintes kényszererőnek felelne meg, s ezt a sima függőleges fal nem képes létrehozni. A feltételezett mozgás más módon, például síneken csúszó csuklókhoz rögzített rúddal megvalósítható.

2. A rúd alsó végpontja nem esik egybe a pillanatnyi forgástengellyel, ezért ezen pontra írva fel a forgómozgás egyenletét ugyancsak hibás eredményt kapunk.

3. A megoldás egyszersmind bemutatja, hogyan lehet ügyes mértékegységrendszer választással egyszerűsíteni a számolást. Aki szerint nem egyszerűbb, hanem furcsább, bonyolultabb lett, az próbálja párhuzamosan, a szokásos egységeket használva, leírni a formulákat, majd vesse össze a két, persze azonos megoldást.