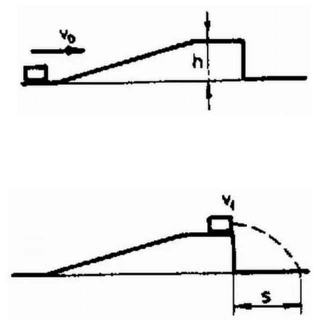
I. megoldás. Legyen a lejtő tetején a test sebessége v_1.



1. ábra

Ez vízszintes irányú, hiszen a test nem emelkedik fel a lejtőről. Mivel súrlódás nincs, felírhatjuk a mechanikai energia megmaradását:

(1) $$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgh,$$

innen

(2) $$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 2gh}.$$

Vizsgáljuk azt az esetet, amikor $\frac{1}{2}mv_0^2 > mgh$. Ha ez nem teljesül, a test nem ér föl a lejtő tetejére, vagy ott megáll. A lejtő tehát legfeljebb

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{2g} = 5 \text{ m magas.}$$

A test a lejtőről való lerepülés után a vízszintes hajítás törvényei szerint mozog. A lerepüléstől a földetérésig eltelt idő:

(3) $$t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

Ezalatt vízszintes irányú sebességkomponense $v_1 =$ állandó, így a földetérés távolsága a lejtő végétől mérve (*1. ábra*):

(4) $$s = v_1 t_0 = \sqrt{2h\frac{v_0^2}{g} - 4h^2}.$$

E mennyiség maximumát keressük:

(5) $$s = \sqrt{(\frac{v_0^2}{2g})^2 - (2h - \frac{v_0^2}{2g})^2}.$$

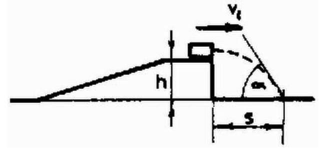
Látható, hogy s akkor maximális, amikor a gyök alatti második tag nulla. Innen az optimális lejtőmagasság:

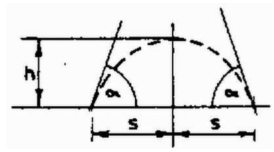
(6) $$h_{opt} = \frac{v_0^2}{4g} = 2,5 \text{ m.}$$

Ezt visszaírva a (4) egyenletbe a földetérés maximális távolsága:

(7) $$s_{\max} = \sqrt{2h_{opt}\frac{v_0^2}{g} - 4h_{opt}^2} = \frac{v_0^2}{2g} = 5 \text{ m.}$$

II. megoldás. Zárjon be a test pályája földetéréskor a talajjal α szöget (*2. ábra*).





2. ábra

A becsapódás pillanatában a test sebessége ugyanaz a v_0, amivel elindítottuk a lejtőn, mert mechanikai energiája a folyamat során állandó maradt.

Ha a testet a Föld felszínén α szög alatt v_0 sebességgel kilőjük, pályája két, egymásra tükörszimmetrikus részből fog állni, és így α szög alatt v_0 sebességgel fog becsapódni (*2. ábra*).

A lejtőről lerepülő test pályája a lejtőtől való elválás után megegyezik a ferde hajítást végző test pályájának második felével. Feladatunk ily módon átfogalmazható: a földfelszínről adott sebességgel, különböző szögek alatt kilőtt testek legfeljebb milyen $2s$ távolságra juthatnak? Ismert, hogy legmesszebbre az $\alpha = 45^\circ$-os szög alatt kilőtt test jut. Ennek sebessége a pálya legfelső pontjában $v_0 \cos 45^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} v_0$ (vízszintes irányban).

Ellenőrizhető, hogy az I. megoldás szerint valóban $v_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} v_0$. A hajítás magassága $\left(\dfrac{v_0^2 \sin^2 45^\circ}{2g} = \dfrac{v_0^2}{4g}\right)$ és a hajítási távolság fele $\left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{v_0^2 \sin 90^\circ}{g} = \dfrac{v_0^2}{2g}\right)$ valóban megegyezik az előbb kapott h-val és s-sel.

Ujváry-Menyhárt Zoltán (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o .t.) és
Weiner Mihály (Bp., Sziklai S. Ált. Isk., 7. o. t.) dolgozata alapján