I. megoldás. A gyöngy ellipszis pályán mozog, mert a két rögzítési ponttól mért távolságainak összege a fonal hosszával egyenlő (ha a fonal súlytalan), s így állandó. Az ellipszis nagy- és kistengelye:

$$2a = 2s, \quad 2b = 2\sqrt{s^2 - \frac{d^2}{4}}.$$

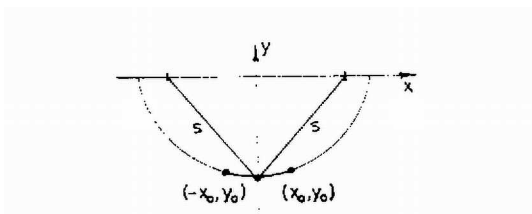
A kényszererők összmunkája 0, ezért az energiamegmaradás

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = mgy_0$$

alakú, ahol y_0 a gyöngy y-koordinátája a kis rezgés végpontjaiban. Az ellipszis egyenletéből

$$y = -\sqrt{s^2 - \frac{d^2}{4}}\sqrt{1 - \frac{x^2}{s^2}} \quad \text{és} \quad y_0 = -\sqrt{s^2 - \frac{d^2}{4}}\sqrt{1 - \frac{x_0^2}{s^2}},$$

a rezgés két végpontjának koordinátái $(-x_0,\, y_0)$ és $(x_0,\, y_0)$, x_0 így a rezgés x-tengelyre eső vetületének amplitúdója. Kis x mellett használhatjuk a $\sqrt{1 - \frac{x^2}{s^2}} \approx 1 - \frac{x^2}{2s^2}$ közelítést.



Ezzel az energiamegmaradást

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\frac{\sqrt{s^2 - \frac{d^2}{4}}}{2s^2}(x_0^2 - x^2)$$

alakban írhatjuk. A kis rezgésnél v_y jó közelítéssel 0. Ezért $x = x_0 \sin\omega t$ és $v \approx \omega x_0 \cos\omega t$. Behelyettesítve az energiamegmaradás egyenletébe azt kapjuk, hogy

$$\omega^2 = g\frac{\sqrt{s^2 - \frac{d^2}{4}}}{s^2},$$

a periódusidő pedig

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi s\sqrt{\frac{1}{g\sqrt{s^2 - d^2/4}}}.$$

II. megoldás. Kis kitérésekre a gyöngy mozgását úgy közelíthetjük, mintha az egyensúlyi pont körül az ehhez a ponthoz tartozó simulókörön mozogna. Így a kis rezgések periódusideje egy olyan matematikai inga lengésidejével egyenlő, amelynek hossza a simulókör sugara. A képletgyűjteményből kiolvasható, hogy az ellipszis ezen pontjához tartozó simulókör sugara $R = \frac{a^2}{b}$, azaz esetünkben $\frac{s^2}{\sqrt{s^2 - d^2/4}}$. A kis rezgések periódusideje tehát

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi s\sqrt{\frac{1}{g\sqrt{s^2 - d^2/4}}}.$$

Czirók András dolgozata alapján