I. megoldás. A tartály akkor kap impulzust, amikor a levegő molekulái a falaknak ütközve visszapattannak. Zárt tartály esetén az így kapott impulzusok eredője 0, nyitott tartálynál azonban a nyílásnál „elvész” az impulzus, a tartály a kiáramló levegő által elvitt impulzussal azonos nagyságú, ellentétes irányú impulzust nyer, mint egy rakéta. Ha a hőközlés olyan gyors, hogy ezalatt a nyíláson nem áramlik ki levegő, akkor impulzust csak a hőközlés után kap a tartály. A hőközlés alatt munkavégzés nem történik, tehát

$$Q = \Delta E = \frac{f}{2} Nk\Delta T \quad \text{és} \quad V\Delta p = Nk\Delta T,$$

amiből

$$\Delta p = \frac{2Q}{f \cdot V} = 4000\ \text{Pa},$$

(a levegőre $f = 5$).

Δp lényegesen kisebb, mint a külső légnyomás, ezért a levegő áramlását a folyadékáramlásoknál megismert törvényekkel közelíthetjük (elhanyagolva ezzel a levegő sűrűségváltozását). A Bernoulli-egyenlet szerint

$$\frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g h + p = \text{ állandó}.$$

Esetünkben a $\varrho g h$ – helyzeti energia jellegű – tagot elhanyagolhatjuk, ezért a levegő kiömlési sebessége,

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta p}{\varrho}}.$$

Kiszámítjuk, mennyi az a „felesleges” levegő, amelynek kiáramlása után a tartályban visszaáll a külső p_0 nyomás. Az egyszerűség kedvéért tekintsük a levegő tágulását izoterm folyamatnak. A hőközlés után közvetlenül

$$(p_0 + \Delta p)V = \frac{m}{M} RT, \tag{1}$$

a kiáramlás megszűnése után

$$p_0 V = \frac{m - \Delta m}{M} RT.$$

A két egyenletből

$$\Delta m = \frac{m}{p_0 + \Delta p} \cdot \Delta p \approx m\frac{\Delta p}{p_0},$$

kihasználtuk, hogy

$$\Delta p \ll p_0.$$

Mivel a tartály fala hőszigetelő, ezért a levegő tágulása sokkal inkább tekinthető adiabatikus folyamatnak. Ekkor a kiáramlás megszűnte után

$$p_0 V = \frac{m - \Delta m}{M} R(T - \Delta T). \tag{2}$$

ΔT-t ki kell fejeznünk Δp-vel. Adiabatikus folyamatokra

$$pV^\kappa = \text{ állandó} \quad \text{és} \quad p^{(1/\kappa)-1}T = \text{ állandó}.$$

A második egyenlőségből

$$\left(\frac{1}{\kappa} - 1\right) p^{(1/\kappa)-2}\Delta p T + p^{(1/\kappa)-1}\Delta T = 0,$$

azaz

$$\Delta T = \frac{\kappa - 1}{\kappa} T \frac{\Delta p}{p}.$$

ΔT-nek ezt a kifejezését a (2) egyenletbe helyettesítve, azt kivonva az (1) egyenletből és a másodrendűen kis tagokat elhagyva azt kapjuk, hogy

$$\Delta m = \frac{m}{\kappa}\frac{\Delta p}{p_0}.$$

Az adiabatikus és izotermikus eredmény $1/\kappa$ szorzótényezőben különbözik egymástól. A levegőre $\kappa = \dfrac{7}{5}$, ezért számértékben a különbség nem nagy.

Sajnos $\varDelta p$ – és ezzel V – időben változik (csökken), az időfüggést csak kissé haladottabb matematikai módszerek segítségével tudjuk meghatározni (lásd a II. megoldást). Azonban csak becslést kell adnunk, ezért számoljunk úgy, mintha az egész $\varDelta m$ tömeg a kezdeti sebességgel áramlana ki a tartályból. Így az elvitt impulzus

$$\varDelta P = \varDelta m \cdot v = \frac{m}{\kappa}\frac{\varDelta p}{p_0}\sqrt{\frac{2\varDelta p}{\varrho}} = \frac{4}{\kappa p_0}\sqrt{\frac{\varrho}{V}}\left(\frac{Q}{f}\right)^{3/2} \approx 0{,}06\frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{s}}.$$

II. megoldás. Az I. megoldásban eljutottunk addig, hogy – a levegő sűrűségváltozását elhanyagolva – a kiömlési sebesség

$$v = \sqrt{\frac{2\varDelta p}{\varrho}}, \tag{1}$$

és a nyomáskülönbség kezdeti értéke

$$\varDelta p = \frac{2Q}{f\cdot V}.$$

A levegő nyomása a tartályban két ok miatt csökken. Egyrészt azért, mert csökken a tartályban levő levegő mennyisége, másrészt azért, mert csökken a levegő hőmérséklete. Ha ez utóbbitól eltekintünk, azaz a folyamatot izotermikusnak tekintjük, akkor a nyomás időegység alatti csökkenése

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\frac{1}{V\cdot M}RT, \tag{2}$$

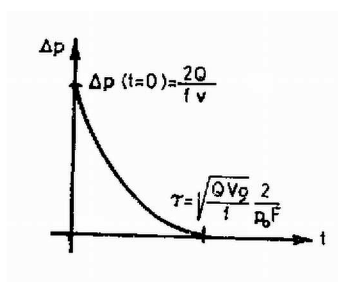
ahol $\dfrac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$ az időegység alatt kiáramló levegő tömege, M a móltömeg A $\mathrm{d}t$ idő alatt kiáramló levegő egy F alapterületű, $v\cdot\mathrm{d}t$ hosszúságú hasábban helyezkedik el (l. ábra), ezért

$$\mathrm{d}m = -\varrho F v\,\mathrm{d}t,$$

azaz

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = -\varrho F v, \tag{3}$$

ahol F a nyílás keresztmetszete – a negatív előjel arra utal, hogy a tartályban a levegő mennyisége csökken.



A kiömlés kezdetekor

$$pV = \frac{m}{M}RT, \tag{4}$$

az (1), (2), (3), (4) egyenletekből azt kapjuk, hogy

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\frac{pF}{V}\sqrt{\frac{2\varDelta p}{\varrho}}.$$

A $\varDelta p$ nyomáskülönbségre érvényes egyenlet

$$\frac{\mathrm{d}(\Delta p)}{\mathrm{d}t} = -\frac{p_0 F}{V}\sqrt{\frac{2\varDelta p}{\varrho}},$$

a gyök előtti p szorzótényezőben $\varDelta p$-t p_0 mellett elhanyagoltuk.

Ezt a differenciálegyenletet könnyen megoldhatjuk, ha észrevesszük, hogy ugyanolyan szerkezetű, mint egy nehézségi erőtérben pattogó rugalmas labda mozgását leíró egyenlet (Δp idő szerinti második differenciálhányadosa állandó). A $\Delta p(t)$ függvény képe parabola. Mivel $t=0$ esetén

$$\Delta p = \frac{2Q}{f \cdot V}, \quad \text{és} \quad \frac{\mathrm{d}(\Delta p)}{\mathrm{d}t} = -\frac{2p_0 F}{V}\sqrt{\frac{Q}{f \cdot V \cdot \varrho}},$$

ezért

$$\Delta p(t) = \frac{2Q}{f \cdot V} - \frac{2p_0 F}{V}\sqrt{\frac{Q}{f \cdot V \cdot \varrho}}t + \frac{p_0^2 F^2}{V^2 \varrho}\frac{t^2}{2} = \left(\sqrt{\frac{2Q}{f \cdot V}} - \frac{p_0 F}{V\sqrt{2\varrho}}t\right)^2$$

A kiáramlás

$$\tau = \sqrt{\frac{QV\varrho}{f}}\frac{2}{p_0 F}$$

ideig tart (l. ábra). A kiáramló levegő $\mathrm{d}t$ idő alatt

$$\mathrm{d}P = \Delta p F \cdot \mathrm{d}t$$

impulzust visz el. Ezért az összes elvitt impulzus

$$\Delta P = \int_0^\tau \Delta p F \mathrm{d}t = F\int_0^\tau \Delta p \mathrm{d}t.$$

Az integrál éppen a parabola alatti területtel egyenlő, ami

$$\frac{1}{3} \cdot \tau \cdot \Delta p(t=0).$$

Így

$$\Delta P = \frac{4}{3p_0}\sqrt{\frac{\varrho}{V}}\left(\frac{Q}{f}\right)^{3/2}.$$

Az I. megoldásban elmondottakhoz hasonlóan belátható, hogy adiabatikus tágulás esetén

$$\Delta P = \frac{4}{3p_0\kappa}\sqrt{\frac{\varrho}{V}}\left(\frac{Q}{f}\right)^{3/2}.$$