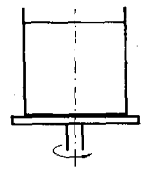
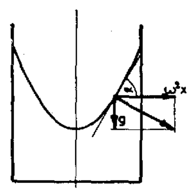
Egy nyugalomban lévő folyadék felszíne merőleges a rá ható erők eredőjére. A folyadékkal együtt forgó vonatkoztatási rendszerben a folyadék nyugalomban van. A vízfelszín egységnyi tömegű darabjára az $\omega^2 x$ nagyságú centrifugális erő és a g nagyságú súlyerő hat, ahol a forgástengelytől mért távolságot x-szel, a víz szögsebességét ω-val jelöltük.



Ha az egyensúlyi felület érintőjének a vízszintessel bezárt szöge α, akkor az ábra alapján

$$tg\,\alpha = \frac{\omega^2\,x}{g}.$$



Ugyanakkor $\mathrm{tg}\,\alpha$ a síkmetszet $y(x)$ görbéjének x pontbeli meredeksége x szerinti deriváltja, így

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\omega^2\,x}{g}.$$

Ismeretes, hogy az ilyen görbe parabola:

(1) $$y(x) = \frac{\omega^2\,x^2}{2g} + y_0,$$

ahol y_0 a vízfelszín magassága a forgástengelynél. Másrészt tudjuk, hogy

(2) $$y(R) = 2H.$$

A forgó folyadék térfogatát integrálással határozhatjuk meg. Bontsuk fel az R sugarat $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \dfrac{R}{n}$ (egyszerűség kedvéért egyenlő) hosszúságú darabokra ($i = 1,\, 2,\, \dots,\, n$). A forgó folyadék térfogatát Δx_i vastagságú, $y(x_i)$ magaságú hengerhéjak térfogatösszegével, pontosabban a

$$\sum_{i=1}^{n} y(x_i) 2\pi x_i \Delta x_i$$

összeggel közelíthetjük; ennek határértéke $n \to \infty$ esetén az

$$\int_0^R y(x) 2\pi x\,\mathrm{d}x$$

integrál adja meg a forgó folyadék térfogatát. (1) alapján

$$\int_0^R y(x) 2\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\omega^2}{g}\int_0^R x^3\,\mathrm{d}x + 2\pi y_0 \int_0^R x\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\omega^2 R^4}{4g} + \pi y_0 R^2.$$

A folyadék térfogata állandó, ezért

$$\frac{\pi\omega^2\,R^4}{4g} + \pi y_0 R^2 = \pi R^2 H,$$

így

(3) $$\frac{\omega^2\,R^2}{4g} + y_0 = H.$$

Az (1), (2) és (3) egyenlőségek összevetéséből

$$y_0 = 0, \quad \omega = \frac{2}{R}\sqrt{gH}, \quad y(x) = 2H\,\frac{x^2}{R^2},$$

tehát a forgástengelyben a víz magassága 0.

A sebesség a pohár falánál

$$v = R \cdot \omega = 2\sqrt{gH}.$$

A víz mozgási energiája szintén integrálással határozható meg:

$$E_{\rm kin} \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\,m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} 2\pi x_i \cdot \Delta x_i \cdot y(x_i) \cdot \varrho \cdot (x_i\omega)^2,$$

így

$$E_{\rm kin} = \pi\varrho\omega^2 \int_0^R x^3 y(x)\,\mathrm{d}x,$$

ahol $\varrho = \dfrac{M}{R^2\pi H}$. Az integrált kiszámítva azt kapjuk, hogy

$$E_{\rm kin} = \frac{4}{3}\,MgH.$$

Gyorsításkor legalább akkora munkát kell végeznünk, mint amekkora a víz energiájának a növekedése:

$$W_{\rm min} = \Delta E_{\rm kin} + \Delta E_{\rm pot}.$$

A mozgási energia változása $\frac{4}{3}MgH$. A helyzeti energia kezdetben $\frac{1}{2}MgH$ volt, a gyorsítás után pedig

$$E_{\rm pot} = \sum_{i=1}^{n} m_i g h_i = \int g\frac{1}{2}y(x)\varrho\ \mathrm{d}V.$$

Felhasználva $y(x)$, ϱ és $\mathrm{d}V$ kifejezéseit, azt kapjuk, hogy

$$E_{\rm pot} = \frac{2}{3}\,MgH.$$

Tehát a minimális munkavégzés

$$W_{\rm min} = \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3} - \frac{1}{2}\right)\,MgH = \frac{3}{2}\,MgH.$$

Ekkora munkát abban az esetben kellene végezni, ha minden veszteségtől (viszkozitás, pohár tömege, stb.) eltekintünk.