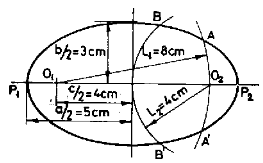
Sajnálatos módon a feladat szövegében egy félreértést eredményező megfogalmazás szerepel. Általában az ellipszis fél-nagytengelyét és fél-kistengelyét jelölik a-val és b-vel, a szövegben viszont e paraméterek a tengelyek teljes hosszát jelentik. Látni fogjuk, hogy az utóbbi esetben *(A változat)* a feladat lényegesen egyszerűbbé válik.

Megoldás.

A) változat: Az ellipszis pontjainak a fókuszpontoktól mért távolságaik összege $a = 10$ cm, másrészt a gumiszálak együttes hossza $L_1 + L_2 = 12$ cm $> a$. A fókuszpontok távolsága $c = 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = 8$ cm. Az O_1 fókuszpontból rajzolt $L_1 = 8$ cm sugarú kör az A és A' pontokban, az O_2 középpontú $L_2 = 4$ cm sugarú kör a B és B' pontokban messe az ellipszist (1. ábra)!



1. ábra

Az előbbiekből következik, hogy az ellipszis AB és $A'B'$ ívén mindkét gumiszál feszítetlen állapotban van, az AA', BB' íveken pedig az egyik gumiszál lesz megfeszítve. Az utóbbi szakaszokon a testre ható erőnek *van* az ellipszis érintőjének irányába mutató összetevője, tehát nem lehet egyensúlyban. Kivételt jelent a nagytengely két végpontja, ezekben a test instabil egyensúlyi helyzetben van. Az AB és $A'B'$ íveken mindkét gumiszál laza, a testre nem hat erő, tehát a test az ívek bármely pontjában egyensúlyban van.

A k_1 rugóállandójú gumiszál akkor lesz legjobban megnyújtva, ha a test a nagytengely P_2 végpontjában van. Ebből (az instabil egyensúlyi helyzetből) kimozdítva a test akkor fog megállni, amikor az 1-es gumiszál rugalmas energiája teljesen átalakul a 2-es gumiszál rugalmas energiájává (a súrlódást elhanyagoltuk):

$$\frac{1}{2}k_1\left(\frac{a+c}{2} - L_1\right)^2 = \frac{1}{2}k_2(l - L_2)^2,$$

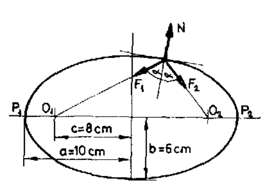
ahol l-lel jelöltük a testnek az O_2 fókuszponttól mért távolságát. A megadott értékekkel $l = 4{,}5$ cm adódik. Itt áll meg a test először, majd visszafelé indul.

A test sebessége ott maximális, ahol rugalmas energiája minimális, tehát ahol stabil egyensúlyi helyzetben van. Ezek a pontok az AB vagy $A'B'$ ív pontjai. Itt mindkét gumiszál laza, az energiamegmaradás törvénye szerint a maximális sebességet az

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k_1\left(\frac{a+c}{2} - L_1\right)^2$$

egyenlet határozza meg. Innen $v = 0{,}447$ m/s, amely sebességet a test az $A(A')$ pontban éri el, és ezzel halad át az $AB(A'B')$ íven.

B) változat: Jelentse a, ill. b az ellipszis fél-nagytengelyét, ill. fél-kistengelyét! Az ellipszis pontjainak a fókuszpontoktól mért távolságaik összege $2a = 20$ cm, és $L_1 + L_2 < 2a$. Ezért az ellipszisnek nem lesz olyan pontja, amelyben mindkét gumiszál laza, de lesz olyan, amelyben mindkettő megfeszített. A nagytengely két végpontjában a test most is instabil egyensúlyi helyzetben van. Keressük meg a stabil egyensúlyi helyzetet! A testre a 2. ábrán látható erők hatnak, $\mathbf{N}$ az ellipsziskeret által kifejtett erő, ami merőleges az ellipszis érintőjére. Egyensúly akkor van, ha az F_1 és F_2 erők érintő irányú összetevői egyenlő nagyságúak és ellentétes irányúak.



2. ábra

Egy geometriai tétel szerint az ellipszis érintőjére merőleges egyenes felezi a két vezérsugár által bezárt szöget (l. pl. Hajós György: Bevezetés a geometriába, 408. o., Tankönyvkiadó, Budapest, 1960). Így a 2. ábrán α-val jelölt szögek egyenlőek, és a rugalmas erők érintő irányú összetevőinek nagysága $F_1 \sin\alpha$ és $F_2 \sin\alpha$. Ezek alapján az egyensúly feltétele:

$$F_1 = F_2.$$

Legyen megnyújtott állapotban az 1-es gumiszál l_1, a 2-es gumiszál l_2 hosszúságú.
A feltételt az alábbi módon írhatjuk át:

$$k_1(l_1 - L_1) = k_2(l_2 - L_2),$$

és

$$l_1 + l_2 = 2a$$

az ellipszis definíciója miatt. E két egyenletből

$$l_1 = \frac{k_1 L_1 + k_2(2a - L_2)}{k_1 + k_2}, \quad l_2 = 2a - l_1.$$

A megadott értékeket behelyettesítve azt kapjuk, hogy a test az O_1 fókuszponttól $l_1 = 14{,}4$ cm-re, az O_2 fókuszponttól $l_2 = 5{,}6$ cm-re lesz stabil egyensúlyi helyzetben.

A második és harmadik kérdésre most is az energiamegmaradás törvényének felhasználásával válaszolhatunk. A test az O_1 fókuszponttól olyan l_1^*, az O_2 fókuszponttól olyan l_2^* távolságban fog először megállni, amelyekre

$$\frac{1}{2}k_1(a + c - L_1)^2 = \frac{1}{2}k_1(l_1^* - L_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(l_2^* - L_2)^2; \quad \text{és} \quad l_1^* + l_2^* = 2a.$$

Ennek az egyenletrendszernek a fizikailag értelmes megoldása $l_1^* = 11{,}3$ cm, $l_2^* = 8{,}7$ cm. (Most $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 8$ cm.)
A test sebessége most is a stabil egyensúlyi helyzetben lesz maximális. Az energiamegmaradás alapján

$$\frac{1}{2}k_1(a + c - L_1)^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 + \frac{1}{2}k_1(l_1 - L_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(l_2 - L_2)^2,$$

amiből $v_{\max} = 3{,}12$ m/s.

Megjegyzések. 1. A *B) változatban* az egyensúlyi helyzetet a rugalmas energia minimalizálásával is meghatározhatjuk. Legyen a test az egyes fókuszpontoktól x és y távolságra.

A rugalmas energia:

$$\frac{1}{2}k_1(x - L_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(y - L_2)^2,$$

és $x + y = 2a, x \geqq L_1, y \geqq L_2$, y-t x-szel kifejezve az energia

$$\frac{1}{2}k_1(x - L_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(2a - x - L_2)^2$$

alakú. Ennek minimumhelyét teljes négyzetté alakítással, vagy differenciálszámítással kaphatjuk meg. Természetesen az $x = l_1$, $y = l_2$ eredmények adódnak.

2. Több megoldó a gumiszálat rugónak tekintette. A gumiszálat azonban a rugóval ellentétben nem lehet összenyomni.