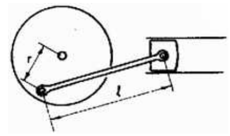
**I. megoldás.** A dugattyúnak a forgástengelytől mért $x$ távolsága az 1. ábra alapján határozható meg:




*1. ábra*

(1) $$x = r\,\cos\alpha + l\,\cos\beta.$$

Az $n$ fordulatszámmal működő robbanómotor tengelyének szögsebessége $\omega = n\pi/30$, a szögelfordulás $\alpha = \omega t$. A szinusztétel alapján

(2) $$r\,\sin\alpha = l\,\sin\beta.$$

Az (1) és (2) egyenletek alapján és $\alpha$ helyébe $\omega t$-t helyettesítve a következő hely–idő összefüggést kapjuk:

(3) $$x(t) = r\,\cos(\omega t) + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2(\omega t)}.$$

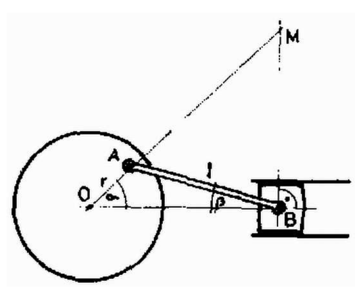
A sebesség–idő összefüggés a hely–idő összefüggés idő szerinti deriváltja, tehát

(4) $$v(t) = x'(t) = -r\omega\,\sin(\omega t) - \frac{r^2\omega\,\sin(2\omega t)}{2\sqrt{l^2 - r^2\sin^2(\omega t)}}.$$

A gyorsulás–idő összefüggés a sebesség–idő összefüggés idő szerinti deriváltja

(5) $$a(t) = v'(t) = -r\omega^2\cos(\omega t) - \frac{r^2\omega^2\cos(2\omega t)}{\sqrt{l^2 - r^2\sin^2(\omega t)}} - \frac{[r^2\omega\sin(2\omega t)]^2}{4[l^2 - r^2\sin^2(\omega t)]^{3/2}}.$$

**II.megoldás.** A hely–idő összefüggést az I. megoldás szerint határozzuk meg. A sebesség kiszámításához keressük meg a hajtókar pillanatnyi forgáscentrumát, $M$-et, azaz azt a pontot, amely körül a hajtókar pillanatnyilag forgómozgást végez. Tudjuk, hogy $M$-ből a hajtókar pontjaiba húzott sugár merőleges az adott pontok sebességeire. A hajtókar $A$ pontja $O$ körüli körpályán mozog, $B$ pontja pedig az $OB$ egyenes mentén, ami alapján $M$ megszerkeszthető (2. ábra).




*2. ábra*

Jelölje $\omega_1$ a hajtókar $M$ körüli forgásának szögsebességét! Ekkor a dugattyú sebessége, ami a hajtókar $B$ pontjának sebességével egyenlő:

(6) $$v(t) = \overline{BM}\cdot\omega_1.$$

Az $ABM$ háromszögre felírt szinusztétel szerint

(7) $$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

a hajtókar $A$ pontjának sebességéből

(8) $$\omega_1 = \frac{-r\omega}{\overline{AM}}.$$

A (6) egyenletbe a (7) és (8) összefüggéseket helyettesítve a (2) összefüggés felhasználásával a sebesség-idő összefüggés I. megoldás szerinti (4) alakját kapjuk.

A gyorsulás–idő összefüggés meghatározásához a hajtókar mozgását bontsuk fel a jobb oldali végpont mozgására, (amelynek sebessége $v$, gyorsulása $a$), valamint a hajtókar jobb oldali végpontja körüli forgómozgásra. Ez utóbbi forgómozgás szögsebességét jelölje $\omega_2$, szöggyorsulását $\beta$. A hajtókar bal oldali végpontjának függőleges sebességét kétféleképpen is felírhatjuk (az $O$, ill. a $B$ pontok körüli forgómozgás alapján):

$$r\omega\ \cos\alpha = l\omega_2\ \cos\beta. \tag{9}$$

Írjuk fel a bal oldali végpont gyorsulásának rúd irányú komponensét is kétféleképpen:

$$r\omega^2 \cos\left[180 - (\alpha+\beta)\right] = a\cos\beta + l\omega_2^2. \tag{10}$$

A (9), (10) összefüggésekből némi algebrai átalakítással a gyorsulás–idő összefüggés már ismert (5) alakja megkapható.

*Megjegyzés.* Tanulságos vizsgálni az $l \gg r$ esetet. Ekkor közelítőleg

$$\begin{aligned} x(t) &= r\cos\omega t - \frac{r^2}{2l}\sin^2\omega t + l, \\ v(t) &= -r\omega\sin\omega t - \frac{r^2\omega}{2l}\sin 2\omega t, \\ a(t) &= -r\omega^2\cos\omega t - \frac{r^2\omega^2}{l}\cos 2\omega t, \end{aligned}$$

azaz megjelennek a kétszeres frekvenciájú felharmonikusok.