A golyó inerciarendszerhez viszonyított $u$ sebességgel érkezik a laphoz. Ugyanekkor a lap inerciarendszerbeli sebessége $v$, amely az $u$ irányával ellentétes irányú (máskülönben a sebességveszteség nem pótlódhatna). A golyó ütközés utáni sebességének nagysága $u$ (mivel mindig ugyanolyan magasra kell, hogy pattanjon), iránya $v$-vel megegyező. Így az ütközés előtti és utáni relatív sebességekre fennáll:

(1) $$k(u+v)=u-v.$$

A golyó egymást követő ütközései között eltelt $t$ idő:

(2) $$t=\frac{2u}{g},$$

másrészt ezen $t$ idő a lap periódusidejének egész számú többszöröse kell, hogy legyen:

(3) $$t=nT=n\frac{2\pi}{\omega},$$

ahol $T$ a lap periódusideje, $\omega$ a lap körfrekvenciája, $n$ pozitív egész szám.

Ha az ütközés a lap $\varphi\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ fázisú pillanatában történik, akkor a lap sebessége

(4) $$v=A\omega\cos\varphi,$$

ahol $A$ a rezgés amplitúdója.

A (2) és (3) egyenletből $u$-t kifejezhetjük $\omega$ és $n$ függvényeként, az (1) és (4) egyenletből is kifejezhetjük $u$-t $\omega$ és $\cos\varphi$ függvényeként. Így kapjuk, hogy egy adott $\varphi$-hez, azaz a lap egy adott kitéréséhez tartozó ütközések esetében a következő $\omega$, illetve frekvencia értékek lehetségesek:

$$\omega=\sqrt{\frac{n}{\cos\varphi}\cdot\frac{\pi g(1-k)}{A(1+k)}},\quad f=\sqrt{\frac{g(1-k)}{4\pi A(1+k)}\cdot\frac{n}{\cos\varphi}},\quad (n=1,\,2,\,\ldots).$$

A fentiek alapján nem nehéz megvizsgálni, hogy milyen $\varphi$ és az előbbiek közül milyen frekvenciák esetében valósítható is meg a golyó állandó pattogtatása. (L. az alábbi megjegyzést!)

$f$ minimális értékét a $\varphi=0,\ n=1$ esetben veszi fel:

$$f_{\min}=0{,}91\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Lényegében ez az eset valósul meg, amikor a pingpongütővel a labdát pattogtatjuk.

*Szekeres Tamás* (Bp., I. István Gimn., III. o. t.)

*Megjegyzés.* Több megoldó is felhívta a figyelmet arra, hogy ütközés után a lap utólérheti a golyót, azaz egy perióduson belül kétszer is ütköznek. Ezen eset tanulmányozása adott $\varphi$ értéknél lehetséges. Másrészt a golyónak $A$-nál magasabbra kell pattannia. Mivel

$$h=\frac{u^2}{2g},$$

ahol $h$ az emelkedési magasság, így a fentiek alapján $u$-t kifejezve nyerjük $h$ értékét:

$$h=\frac{\pi}{2}A\frac{1+k}{1-k}n\cos\varphi.$$

Így kapjuk az alábbi feltételt:

$$n\cos\varphi>\frac{1-k}{1+k}\cdot\frac{2}{\pi}.$$

A feladatbeli esetre $n=1$ esetén $\varphi<88^\circ$ adódik.