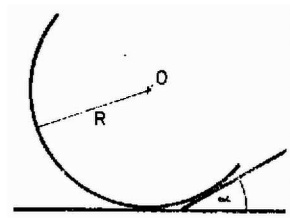
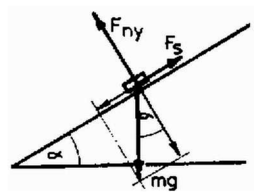
Ha a bogár a félgömbhéj valamelyik pontjában áll, akkor ezt tekinthetjük úgy, mintha egy α hajlásszögű lejtőn volna, ahol α a bogár helyén a gömbhéjhoz húzott érintő és a talaj hajlásszöge (1. ábra).



1. ábra



2. ábra

A lejtőknél megismert összefüggés szerint a tapadási súrlódási erőre (2. ábra):

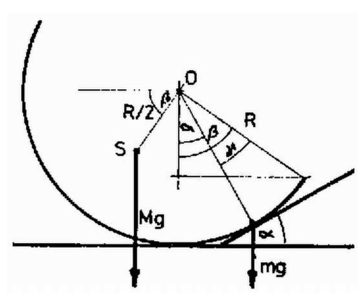
$$F_s \leqq \mu F_{ny},$$

azaz

$$mg\,\sin\alpha \leqq \mu\, mg\,\cos\alpha.$$

(1) $$\operatorname{tg}\alpha \leqq \mu.$$

A bogár akkor tud kimászni megcsúszás nélkül a labdából, ha mozgása folyamán minden pontban teljesül az (1) feltétel.



3. ábra

A 3. ábra alapján a bogárból és a félgömbhéjból álló rendszerre felírhatjuk a labda középpontjára vonatkozó forgatónyomatékok egyensúlyát:

$$mgR\,\sin\alpha = Mg\frac{R}{2}\cos\beta,$$

azaz

(2) $$mgR\,\sin(\beta-\gamma) = Mg\frac{R}{2}\cos\beta,$$

ahol β az OS egyenesnek a vízszintessel bezárt szögét, γ pedig a bogár helye és a félgömb „szélső” pontja által meghatározott szöget jelöli $\left(0 \leqq \gamma \leqq \frac{\pi}{2}\right)$.

A (2) összefüggésből $a = \frac{M}{2m}$ jelöléssel

$$\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\cos\beta} = a,$$

$$\operatorname{tg}\,\beta\cos\gamma - \sin\gamma = \mathrm{a},$$

$$\operatorname{tg}\,\beta = \frac{\mathrm{a}+\sin\gamma}{\cos\gamma}.$$

Így $\alpha=\beta-\gamma$ alapján

$$\text{tg}\ \alpha=\frac{\text{tg}\ \beta-\text{tg}\ \gamma}{1+\text{tg}\ \beta\ \text{tg}\ \gamma}=\frac{a\cos\gamma}{1+a\cdot\sin\gamma}. \tag{3}$$

Mivel az utóbbi tört számlálója γ-nak csökkenő, nevezője pedig γ-nak növekvő, pozitív értékű függvénye, ezért $\text{tg}\,\alpha$ γ-nak csökkenő függvénye, így $\text{tg}\,\alpha$ valamint α a $\gamma=0$ szélső helyzetben maximális.

Ez azt jelenti, hogy a bogár akkor tud kimászni a labdából, ha még a $\gamma=0$ szélső helyzetben is teljesül az (1) feltétel, azaz (3) alapján

$$a\leqq\mu,\quad \frac{M}{m}\leqq 2\mu=1,$$

vagyis a bogár tömege legalább akkora, mint a labda tömege.

Megyeri Gergely (Bp., Árpád Gimn., III. o. t.)