I. megoldás. Az ideális fonálinga nehezékének sebessége mozgása során mind az irányát, mind a nagyságát változtatja; ennek megfelelően a gyorsulása a centripetális, valamint az érintőirányú komponensből tevődik össze. E két gyorsulás mindig merőleges egymásra. A pálya legalsó pontjában az érintőirányú gyorsulás nulla (nincs érintőirányban ható erő), így a feladatban megadott $2g$ gyorsulás a centripetális gyorsulás

$$2g = \frac{v_{\max}^2}{R}, \tag{1}$$

ahol R a fonál hossza. Az energiatétel felhasználásával kiszámolhatjuk a maximális kitérés magasságát (a pálya legalsó pontjában vesszük a helyzeti energiát zérusnak):

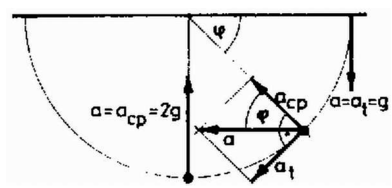
$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 = mgh. \tag{2}$$

Ebből (1) felhasználásával $h = R$, vagyis a fonálingát vízszintes helyzetből indítottuk. A nehezék sebessége a vízszintes helyzettől mért φ szögnél szintén az energiatételből határozható meg:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgR\sin\varphi,$$

$$v^2 = 2gR\sin\varphi. \tag{3}$$

A gyorsulásvektor abban a helyzetben lesz vízszintes, amikor a centripetális gyorsulás vektorával éppen a kitérés φ szögét zárja be (1. ábra).



1. ábra

Ekkor:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a_t}{a_{cp}}. \tag{4}$$

(3) felhasználásával

$$a_{cp} = \frac{v^2}{R} = 2g\sin\varphi,$$

míg

$$a_t = g\cos\varphi.$$

Ezekkel

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{2}.$$

A φ-re kapott megoldások közül csak a $0 \leqq \varphi \leqq 180°$ értékeknek van számunkra jelentése:

$$\varphi_1 = 35{,}3°, \quad \varphi_2 = 144{,}7°.$$

A gyorsulásvektor ezekben a helyzetekben lesz vízszintes irányú. Ilyenkor

$$a = \frac{a_t}{\sin\varphi} = \frac{g}{\operatorname{tg}\varphi} = \pm\sqrt{2}\,g.$$

(A negatív előjel azt jelzi, hogy $\varphi_2 = 144{,}7°$-nál a gyorsulás iránya éppen ellentétes a $\varphi_2 = 35{,}3°$-nál levővel.)

II. megoldás. Válasszunk olyan koordinátarendszert, amelyben a pozitív y irány függőlegesen lefelé, a pozitív x irány pedig vízszintesen balra mutat, és írjuk fel a gyorsulásvektor ilyen irányú komponenseit egy tetszőleges φ-vel jellemzett helyzetben:

$$a_x = a_{cp}\cos\varphi + a_t\sin\varphi, \tag{5}$$

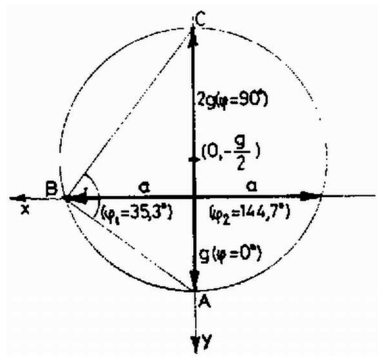
$$a_y = -a_{cp}\sin\varphi + a_t\cos\varphi. \tag{6}$$

Ezekbe helyettesítve a_{cp} és a_t, kifejezéseit:

$$a_x = \frac{3}{2} g \sin 2\varphi, \tag{7}$$

$$a_y = \frac{g}{2} + \frac{3}{2} g \cos 2\varphi. \tag{8}$$

Ez pedig egy kör paraméteres egyenlete. Ha tehát a vízszintes helyzetből elindított fonálinga nehezékének a φ szögtől függő gyorsulásvektorát nagyság és irány szerint közös kezdőpontból felrajzoljuk és azt a kezdőpontot koordinátarendszerünk origójának tekintjük, a vektor végpontja a $\left(0, -\frac{g}{2}\right)$ középpontú $\frac{3}{2}g$ sugarú körvonalon söpör végig (2. ábra). $\varphi = 0°$-nál a gyorsulás nagysága g és iránya függőlegesen lefelé mutat, míg $\varphi = 90°$-nál a gyorsulás nagysága $2g$ és iránya függőlegesen felfelé mutat.



2. ábra

A keresett vízszintes gyorsulás éppen az ABC derékszögű háromszög átfogójához tartozó magassága (2. ábra), így nagysága a magasságtétel alapján g és $2g$ mértani közepe, $\pm\sqrt{2}g$.

Az ehhez tartozó szöget a kör egyenletéből határozhatjuk meg: $a_y = 0$, $a_x = \pm\sqrt{2}g = \frac{3}{2}g \sin 2\varphi$. Az innen kapott megoldások: $\varphi_1 = 35{,}3°$ és $\varphi_2 = 144{,}7°$. (A $0 \leqq \varphi \leqq 180°$ tartományban 4 szögérték adódik, de ezek közül csak azok érdekesek, amelyeknél $a_y = 0$.)

Buzás Edit (Miskolc, Herman O. Gimn., III. o. t.)
dolgozata alapján

Megjegyzés: A II. megoldásnál ne felejtsük el, hogy a gyorsulásokra kapott (7) és (8) egyenletek csak a vízszintes helyzetből elengedett ideális fonálingára érvényesek.