

Legyen az $M = 1,990 \cdot 10^{30} \text{ kg}^1$ tömegű Nap gravitációs terében mozgó m tömegű üstökös tömegközéppontjának a Naptól mért távolsága perihéliumban r_p , aphéliumban r_a . Mivel a gravitációs erő konzervatív és centrális, a mechanikai energia és impulzusmomentum megmaradása szerint

$$(1) \quad \frac{1}{2}mv_p^2 - \gamma \frac{Mm}{r_p} = \frac{1}{2}mv_a^2 - \gamma \frac{Mm}{r_a},$$

$$(2) \quad mv_p r_p = mv_a r_a.$$

Itt v_p és v_a az üstökös sebessége napközépen, illetve naptávolban, $\gamma = 6,670 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ a gravitációs állandó. Mivel feladatunk szerint $r_p = 8,782 \cdot 10^{10} \text{ m}$ (1986-ban volt az üstökös perihéliumban) és $v_p = 5,452 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ ismert, a fenti két egyenletből r_a és v_a meghatározható. E célból fejezzük ki a (2) összefüggésből v_a -t és helyettesítsük (1)-be. Ekkor

$$\frac{1}{2}v_p^2 - \gamma \frac{M}{r_p} = \frac{1}{2}v_p^2 r_p^2 \cdot \frac{1}{r_a^2} - \gamma M \cdot \frac{1}{r_a},$$

amely $\frac{1}{r_a}$ -ra nézve másodfokú egyenlet. Vegyük észre, hogy $r_a = r_p$ ennek triviális megoldása, így a gyökök és együtt-hatók közötti ismert összefüggés alapján

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_p} = \frac{2\gamma M}{v_p^2 r_p^2},$$

ahonnan adataink felhasználásával

$$(3) \quad r_a = \left[\frac{2\gamma M}{v_p^2 \cdot r_p^2} - \frac{1}{r_p} \right]^{-1} = 5,2 \cdot 10^{12} \text{ m}.$$

A (2) impulzusmomentum megmaradásból

$$v_a = v_p \cdot \frac{r_p}{r_a} = 9,2 \cdot 10^2 \text{ m/s}.$$

Kepler III. törvénye szerint bármely, a Nap körül keringő objektumra nézve

$$(4) \quad T^3/a^3 = \text{állandó},$$

ahol T az égitest keringési ideje, a a Naptól mért középtávolsága. A Halley-üstökös középtávolsága

$$a_H = \frac{1}{2}(r_p + r_a) = 2,6 \cdot 10^{12} \text{ m}.$$

Felhasználva a Föld $T_F = 1$ év, $a_F = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$ megfelelő adatait, az üstökös keringési ideje

$$T_H = T_F \cdot \left(\frac{a_H}{a_F} \right)^{3/2} \approx 74 \text{ év},$$

ami jól megközelíti a megfigyelt kb. 76 éves periódusidőt.

Mivel Newton (1642 – 1727) 85 évet élt, láthatta az üstököst. Feljegyzések szerint 1682-ben a Halley-üstökös feltűnését valóban megfigyelték.

Németh László (Győr, Révai M. Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Számolásunk során, mint az a (3) egyenletből látható, r_a két, közel egyenlő szám kis különbségként adódott. Ennélfogva a keringési idő is igen érzékenyen függ a felhasznált adatok pontosságától. Így pl. aki a függvénytáblából vett $M = 1,983 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ naptömegeggyel számolt, az $r_a \approx 6,6 \cdot 10^{12} \text{ m}$, $v_a \approx 720 \text{ m/s}$ és $T_H \approx 106$ év eredményeket kapta. A felhasznált adatok pontatlanságából származó numerikus hibákat a feladatok értékelésénél nem vettük figyelembe.

¹ A Nap tömegének ez az értéke G. W. C. Kaye, T. H. Laby: Tables of Physical and Chemical Constants (1973) c. könyvében található meg.