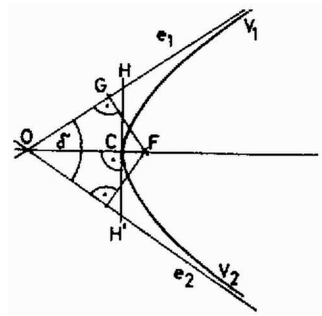
Legyen az M tömegű, R sugarú Nap közvetlen közelében c fénysebességgel elhaladó m tömegű fényrészecske sebessége a Naptól igen nagy távolságban lévő V_1 pontban v. Ekkor mechanikai energiája

$$E_{\text{mech}} = E_{\text{mozg}} = \frac{1}{2}mv^2 > 0.$$



A részecske pályája a Nap gravitációs terében a V_1 és V_2 ponton átmenő hiperbola, amelynek F fókuszpontjában a Nap áll és aszimptotái a Nap középpontjától $FG = d$ távolságban futó e_1 és e_2 egyenesek. Mivel a „végtelen távoli” V_1, illetve V_2 pontban a fényrészecske v, ill. v' sebessége párhuzamos az aszimptotákkal, a keresett eltérülés szöge δ, éppen az aszimptoták hajlásszöge. A hiperbola geometriájából (pl. Négyjegyű függvénytáblázat 78. o.) ismert, hogy ha H és H' a hiperbola C csúcspontjában húzott érintőnek az e_1, illetve e_2 aszimptotával való metszéspontja, O az aszimptoták metszéspontja, akkor $HO = H'O = FO = c$ a hiperbola fókusztávolsága, $CO = a$ a nagytengely, $HC = H'C = b$ a képzetes tengely és fennáll, hogy

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{1}$$

Az FOG és HOC háromszögek egybevágóságából

$$OC = OG = a \quad \text{és} \quad b = HC = FG = d,$$

továbbá

$$FC = R \quad \text{miatt} \quad c = R + a.$$

E két utóbbi összefüggést (1)-be helyettesítve rendezés után azt kapjuk, hogy

$$\frac{a}{d} = \frac{1 - (R/d)^2}{2R/d} = \operatorname{tg}(\delta/2). \tag{2}$$

A mechanikai energia és az impulzusmomentum megmaradását a V_1 és C pontokra felírva

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mc^2 - \frac{\gamma Mm}{R}, \tag{3}$$

$$mvd = mcR,$$

ahonnan

$$\frac{R}{d} = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{2\gamma M}{Rc^2}} = \sqrt{1 - \frac{v_{\text{sz}}^2}{c^2}}. \tag{4}$$

Itt $\gamma = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{Nm}^2/\text{kg}^2$ a gravitációs állandó, $M = 2{,}0 \cdot 10^{30}$ kg, $R = 7{,}0 \cdot 10^8$ m, $c = 3{,}0 \cdot 10^8$ m/s, $v_{\text{sz}} = \sqrt{\dfrac{2\gamma M}{R}} \approx 6{,}2 \cdot 10^6$ m/s pedig a szökési sebesség a Nap felszínén. (4)-et (2)-be írva

$$\frac{\delta}{2} \approx \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{(v_{\text{sz}}/c)^2}{2\sqrt{1 - (v_{\text{sz}}/c)^2}} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{v_{\text{sz}}}{c}\right)^2, \quad (v_{\text{sz}}/c << 1)$$

ahonnan a keresett eltérülés

$$\delta \approx \left(\frac{v_{\text{sz}}}{c}\right)^2 = 4{,}2 \cdot 10^{-6}\ \text{rad} = 0{,}87\ \text{szögmásodperc}.$$

Megjegyzések. 1. A (3) energiamérleg szerint $v^2/c^2 = 1 - v_{\text{sz}}^2/c^2 \sim 1$ kb. 10^{-4} pontossággal; vagyis a „fényrészecske” csak igen kis mértékben gyorsul a Nap gravitációs terében.

2. A relativitáselmélet alapján kapott eltérülés $\delta_{\text{rel}} = 1{,}74$”, éppen kétszerese a klasszikus közelítésnek míg a teljes napfogyatkozáskor megfigyelhető érték $\delta_{\text{kísérlet}} = 1{,}86$” (Budó – Mátrai: Kisérleti fizika III., 314. o.).

Boda Imre (Kaposvár, Táncsics M. Gimn. III. o. t.)